NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

CHARLES RUCHONNET

Solution de trois questions proposées par M. Gilbert, professeur à l'université de Louvain

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 12 (1873), p. 223-231

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1873_2_12__223_1>

SOLUTION DE TROIS QUESTIONS

Proposées par M. Gilbert, Professeur à l'Université de Louvain;

PAR M. CHARLES RUCHONNET.

Je commence par la troisième question, pour pouvoir en utiliser le résultat dans la solution de l'une des deux autres.

Soit m' la projection de M' sur le plan osculateur en M; on sait que

$$M'm' = \frac{1}{6}\frac{ds^3}{RT}.$$

Je fais glisser sur la courbe donnée une droite qui reste constamment perpendiculaire au plan osculateur en M, et le cylindre que cette droite engendre, je le développe sur le plan rectifiant en M. Les points M', m' viennent prendre sur ce plan des positions N et n. Le point n est situé sur la tangente en M à la courbe, et l'on a

$$(1) \qquad Nn = M'm' = \frac{1}{6}\frac{ds^3}{RT}.$$

Comme le développement du cylindre n'a point altéré les longueurs des arcs MM', Mm', on a

$$(2) \qquad \text{arc}\,MN = \text{arc}\,MM', \quad Mn = \text{arc}\,Mm'.$$

Posons

$$(3) \qquad Mn = a.$$

Rapportons la courbe MN à deux axes rectangulaires, prenant le point M pour origine, la tangente Mn pour axe des x, et la normale principale en M pour axe des y. Comme Nn est du troisième ordre (2), l'équation de la courbe MN est, en désignant par A une constante,

(4) $y = Ax^3 +$ des termes en x de degrés supérieurs à 3;

et l'on tire de là

$$\frac{dy}{dx} = 3Ax^2 + \text{des termes en } x \text{ de degrés supérieurs à 2.}$$

On a

$$\text{arc}\,MN = \int_0^a dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \int_0^a dx\sqrt{1 + 9A^2x^4}$$
$$= \int_0^a dx \left(1 + \frac{9}{2}A^2x^4\right),$$

d'où

$$\text{arc}\,MN = a + \frac{9}{10}A^2a^5.$$

Comme MM' ou ds et a sont égaux en tant que infiniment petits, les équations (1) et (4), rapprochées l'une de l'autre, montrent que A est égal à $\frac{1}{6RT}$; donc

$$\text{arc}\,MN = a + \frac{1}{40}\frac{a^5}{R^2T^2},$$

d'où, en vertu des équations (2) et (3),

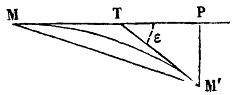
$$\text{arc}\,\text{MM}' - \text{arc}\,\text{M}m' = \frac{1}{40}\,\frac{a^5}{\text{R}^2\text{T}^2}.$$

Ecrivant dans cette équation ds au lieu de a, on obtient la relation qu'il s'agissait de vérifier.

Je passe à la première question.

Soit toujours m' la projection de M' sur le plan osculateur en M. La projection de $\text{M}'\text{M}_1$ sur la normale principale en M est égale à la projection de $m'\text{M}_1$ sur cette normale; et, comme la direction $m'\text{M}_1$ fait avec la normale principale un angle infiniment petit, on peut remplacer la projection de $m'\text{M}_1$ par $m'\text{M}_1$ lui-même. Or on sait que $m'\text{M}_1 = \frac{\text{R}'\,ds^3}{6\text{R}^2}$, R' représentant la dérivée $\frac{d\text{R}}{ds}$, et cette expression est équivalente à $\frac{u\,ds^3}{6\text{R}^2\text{T}}$, à cause de $u = \text{R}'\text{T}$.

Fig. 1.



Je prends enfin la deuxième question, et je considère d'abord le cas d'une courbe plane.

Rapportons la courbe à deux axes rectangulaires, en prenant M pour origine, la tangente en M pour axe des x, et la normale pour axe des y. On a, en désignant par A et B deux constantes,

(I) $y = \text{A}x^2 + \text{B}x^3 +$ des termes en x de degrés supérieurs à 3,

d'où

$\frac{dy}{dx} = 2\text{A}x + 3\text{B}x^2 +$ des termes en x de degrés supérieurs à 2.

Soit P (*fig.* 1) le pied de la perpendiculaire abaissée de M′ sur la tangente en M. Posons MP $= a$; on a

$$\text{arc}\,\text{MM}' = \int_0^a dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$= \int_0^a dx \sqrt{1 + 4\text{A}^2 x^2 + 12\,\text{AB}x^3}$$

$$= \int_0^a dx\,(1 + 2\text{A}^2 x^2 + 6\,\text{AB}x^3),$$

d'où

$$\text{(II)} \qquad \text{arc}\,\text{MM}' = a + \frac{2}{3}\text{A}^2 a^3 + \frac{3}{2}\text{AB}a^4.$$

Il s'agit maintenant d'obtenir les expressions de A et de B.

Menons la tangente en M′; soit T le point où elle coupe celle en M. Désignons par ε l'angle des deux tangentes. Pour fixer les idées, supposons que le rayon de courbure aille croissant de M vers M′; alors on a, comme on sait,

$$\text{M}'\text{T} = \frac{1}{2}ds + \frac{1}{12}\varepsilon\, d\text{R},$$

d'où

$$\text{(III)} \qquad \text{M}'\text{P} = \frac{1}{2}\varepsilon\, ds + \frac{1}{12}\varepsilon^2 d\text{R}.$$

Or l'égalité $\frac{ds}{\varepsilon} = \text{R} + \frac{1}{2}d\text{R}$, qui est vraie au second ordre près, donne, au troisième ordre près,

$$\text{(IV)} \qquad \varepsilon = \frac{ds}{\text{R}} - \frac{1}{2}\frac{\text{R}'ds^2}{\text{R}^2}.$$

Substituant cette valeur dans (III), il vient

$$\text{M}'\text{P} = \frac{ds^2}{2\text{R}} - \frac{\text{R}'ds^3}{6\text{R}^2}.$$

Comme la différence entre arc MM′ et MP, c'est-à-dire entre ds et a, est du troisième ordre, l'équation précédente reste exacte au quatrième ordre près, si l'on y écrit a au lieu de ds, ce qui donne

$$M'P = \frac{a^2}{2R} - \frac{R' a^3}{6R^2}.$$

Cette équation, rapprochée de (I), montre qu'on a

$$A = \frac{1}{2R}, \quad B = -\frac{R'}{6R^2},$$

et l'équation (II) devient, en substituant ces valeurs,

$$(\text{V}) \qquad \text{arc}\, MM' = a + \frac{1}{6R^2} a^3 - \frac{R'}{8R^3} a^4.$$

Calculons maintenant la corde MM′. Posons

$$\text{angle}\, M'MP = M;$$

on a

$$\text{corde}\, MM' = \frac{a}{\cos M},$$

d'où, au cinquième ordre près,

$$\text{corde}\, MM' = \frac{a}{1 - \frac{1}{2} M^2}.$$

Puisque nous supposons que le rayon de courbure va croissant de M vers M′, on a, comme on sait,

$$M = \frac{1}{2} \varepsilon + \frac{1}{12} R' \varepsilon^2,$$

d'où, au cinquième ordre près,

$$\text{corde}\, MM' = \frac{a}{1 - \frac{1}{8}\varepsilon^2 - \frac{1}{24} R' \varepsilon^3} = a \left(1 + \frac{1}{8}\varepsilon^2 + \frac{1}{24} R' \varepsilon^3\right),$$

d'où, en remplaçant ε par sa valeur (IV),

$$\text{corde}\,\mathrm{MM}' = a\left(1 + \frac{ds^2}{8\mathrm{R}^2} - \frac{\mathrm{R}'\,ds^3}{12\mathrm{R}^3}\right).$$

Remplaçant ds par a, cette égalité reste exacte au cinquième ordre près; il vient

$$\text{corde}\,\mathrm{MM}' = a + \frac{a^3}{8\mathrm{R}^2} - \frac{\mathrm{R}'\,a^4}{12\mathrm{R}^3}.$$

Retranchant cette dernière de (V), on obtient

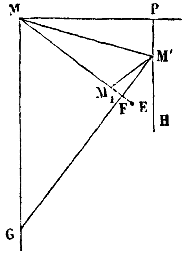
$$\text{arc}\,\mathrm{MM}' - \text{corde}\,\mathrm{MM}' = \frac{a^3}{24\mathrm{R}^2} - \frac{\mathrm{R}'\,a^4}{24\mathrm{R}^3}.$$

Au cinquième ordre près, on peut écrire dans celle-ci ds au lieu de a; donc

$$\text{arc}\,\mathrm{MM}' - \text{corde}\,\mathrm{MM}' = \frac{ds^3}{24\mathrm{R}^2} - \frac{\mathrm{R}'\,ds^4}{24\mathrm{R}^3}.$$

Considérons la différence arc MM_1 — corde MM_1 relative au cercle osculateur; comme, par hypothèse,

Fig. 2.



arc MM_1 = arc $\mathrm{MM}' = ds$, comme R' est nul dans un cercle, et comme R a la même valeur dans la courbe considérée et dans le cercle osculateur, la précédente égalité donne

$$\text{arc}\,MM_1 - \text{corde}\,MM_1 = \frac{ds^3}{24R^2}.$$

Retranchant l'une de l'autre ces deux équations, il vient

$$\text{corde}\,MM' - \text{corde}\,MM_1 = \frac{R'\,ds^4}{24R^3}.$$

Sur la corde MM_1 prolongée, prenons $ME = MM'$ (*fig.* 2); on a, d'après la dernière égalité,

$$M_1E = \frac{R'\,ds^4}{24R^3}.$$

De M' abaissons une perpendiculaire sur MM_1; elle coupe cette droite et la normale en des points F et G. La longueur FE est du cinquième ordre, parce que l'angle $M'MM_1$ est du second, et MM' du premier; on peut donc négliger FE devant M_1E, et écrire

$$\text{(VI)} \qquad M_1F = \frac{R'\,ds^4}{24R^3}.$$

Soit $M'H$ le prolongement de PM', qui est parallèle à la normale en M. Désignons par Z la projection de $M'M_1$ sur la tangente MP, ce qui est la grandeur dont il s'agit d'obtenir l'expression; on a

$$Z = M'M_1 \times \text{angle}\,M_1M'H,$$

ou

$$Z = M'M_1(M_1M'F + FM'H).$$

Or $FM'H = M'GM = FMP$, et l'angle FMP est égal à la moitié de l'angle des tangentes au cercle en M et en M_1, et ce dernier est égal, en tant qu'infiniment petit, à ε ou $\frac{ds}{R}$, puisque MM_1 est le cercle osculateur en M. Donc

$$FM'H = \frac{ds}{2R},$$

d'où

$$\text{(VII)} \qquad Z = M'M_1 \left(M_1M'F + \frac{ds}{2R} \right).$$

$M'M_1$ étant, en tant qu'infiniment petit, égal à la distance de M' au cercle osculateur, on a, comme on sait,

$$\text{(VIII)} \qquad M'M_1 = \frac{R' ds^3}{6R^2}.$$

D'ailleurs angle $M_1M'F = \frac{M_1F}{M'M_1}$, d'où, en vertu des équations (VI) et (VIII) données ci-dessus,

$$\text{(IX)} \qquad \text{ang}^{\text{le}}\, M_1M'F = \frac{ds}{4R}.$$

Les équations (VII), (VIII) et (IX) donnent

$$\text{(X)} \qquad Z = \frac{R' ds^4}{8R^3}.$$

Supposons maintenant que la courbe ne soit pas plane. Considérons sa projection sur le plan osculateur en M, et soit m' la projection de M' sur ce plan. La projection de $M'M_1$ sur la tangente en M est égale à celle de $m'M_1$.

Sur la projection de la courbe, prenons

$$\text{arc}\, MK = \text{arc}\, MM';$$

on aura

$$\text{arc}\, MK = \text{arc}\, MM_1.$$

Comme la courbe considérée et sa projection ont au point M non-seulement même cercle osculateur, mais encore même R', on a, par l'équation (X) ci-dessus,

$$\text{projection de } KM_1 \text{ sur la tangente en } M = \frac{R' ds^4}{8R^3}.$$

Remarquons maintenant que, comme on a par construction $\text{arc}\, m'K = \text{arc}\, MM' - \text{arc}\, Mm'$, et que cette différence est du cinquième ordre, comme il a été démontré ci-dessus en traitant la troisième des questions proposées, la projection de $m'M_1$ sur la tangente en M est, au cinquième ordre près, égale à celle de KM_1. On a donc, par l'équation précédente,

$$\text{projection de } m'M_1 \text{ sur la tangente en } M = \frac{R' ds^4}{8R^3};$$

d'où, en remplaçant R' par $\frac{u}{T}$ et la projection de $m'M_1$ par celle de $M'M_1$, qui lui est égale, comme nous l'avons fait remarquer tout à l'heure,

$$\text{projection de } M'M_1 \text{ sur la tangente en } M = \frac{u\, ds^4}{8R^3T}.$$