NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ARONHOLD

Sur les vingt-huit tangentes doubles d'une courbe du quatrième degré

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 11 (1872), p. 438-443

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1872_2_11__438_1>

SUR LES VINGT-HUIT TANGENTES DOUBLES D'UNE COURBE DU QUATRIÈME DEGRÉ;

PAR M. ARONHOLD (*).

(Traduit de l'allemand. — Extrait des *Comptes rendus mensuels de l'Académie de Berlin;* 1864.)

L'application de la théorie des formes homogènes du quatrième degré à trois variables conduit dans beaucoup de cas à un problème dont l'interprétation géométrique est la détermination des tangentes doubles d'une courbe du quatrième ordre. Dans les recherches de Steiner et de M. Hesse, publiées dans le tome XLIX du *Journal de Crelle*, p. 243, 265 et 279, recherches qui renferment ce qui a été publié d'essentiel sur ce sujet, ces géomètres se sont surtout occupés des propriétés des points de contact

(*) Voir *Nouvelles Annales*, 2e série, t. VI, p. 241, la traduction du Mémoire de Steiner sur ce sujet.

des doubles tangentes, propriétés dont on déduit du reste d'importantes conséquences relativement aux doubles tangentes elles-mêmes. J'ai réussi, par des considérations directes, à établir entre les doubles tangentes une liaison très-simple, qui non-seulement donne les résultats connus, mais conduit encore à des propriétés nouvelles.

Le développement de ces considérations est l'objet de cette Note.

Une courbe du quatrième ordre étant déterminée par quatorze éléments, on peut se donner sept droites arbitrairement et les prendre comme tangentes doubles d'une courbe du quatrième ordre. Je supposerai d'ailleurs qu'il n'y a entre ces droites aucune relation projective.

1. Sept droites déterminent une infinité de courbes de troisième classe, dont chacune touche toutes ces droites; je dirai que l'ensemble de ces courbes forme un réseau. Si l'on se donne arbitrairement une huitième droite, il y a une infinité de courbes de troisième classe, faisant partie du réseau, qui touchent cette droite et les sept droites données; l'ensemble de ces droites forme un faisceau. Toutes les courbes d'un faisceau ont en commun, d'après un théorème bien connu, une neuvième tangente. D'où il suit que deux courbes quelconques du réseau ont deux tangentes communes (distinctes des sept tangentes fondamentales), lesquelles touchent aussi toutes les courbes d'un faisceau déterminé par ces deux courbes.

Je désignerai ces deux tangentes sous le nom de *couple* du faisceau, et leur point de rencontre sous le nom de *sommet* du faisceau.

2. Je m'appuierai sur le théorème qui suit :

Étant données sept droites fondamentales $G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6, G_7$, *si l'on considère une courbe quelconque* C *faisant partie du réseau déterminé par ces droites, les sommets des divers faisceaux dont fait partie* C *sont situés sur une même droite* T, *à laquelle est tangente la courbe* C.

Cette tangente n'est pas une tangente singulière de C; elle varie suivant le réseau dont C fait partie : je la désignerai sous le nom de *tangente principale* de C. D'un point quelconque de T on ne peut mener que trois tangentes à C, dont deux forment le couple d'un faisceau et dont la troisième est la tangente principale. On déduit facilement de là qu'une courbe du réseau a une seule tangente principale.

Pour démontrer le théorème fondamental, prenons arbitrairement trois courbes du réseau C_1, C_2 et C_3, et désignons respectivement par S_{12}, S_{23}, S_{31} les sommets des faisceaux déterminés par les courbes C_1 et C_2, C_2 et C_3, C_3 et C_1.

On peut considérer $C_1 S_{23}$, $C_2 S_{31}$, $C_3 S_{12}$ comme des courbes de quatrième classe dont chacune se compose d'un point et d'une courbe de troisième classe.

$C_2 S_{31}$ et $C_3 S_{12}$ ont seize tangentes communes dont trois sont déterminées par les treize autres; toute courbe de quatrième classe tangente à ces treize droites est tangente aux trois premières. C'est ce qui a lieu pour la courbe $C_1 S_{23}$; car, d'après la définition, elle touche les sept droites G, les deux tangentes menées de S_{12} à C_1 et à C_2, les deux tangentes menées de S_{13} à C_1 et à C_3, et enfin les deux tangentes menées de S_{23} à C_2 et C_3; elle touche donc treize tangentes communes à $C_2 S_{31}$ et $C_3 S_{12}$, et par conséquent elle touche aussi les trois autres tangentes communes, c'est-à-dire les droites qui joignent entre eux les points S_{12}, S_{23} et S_{31}; deux de ces droites passent par le point S_{23}, l'autre droite qui joint les points S_{12} et S_{31} est tangente à la courbe C_1, et c'est la tangente principale de

C_1. On ne peut en effet mener du point S_{12} qu'une tangente à C_1 (différente de celles qui forment le couple relatif au faisceau C_1, C_2); et cette tangente restera la même, si on remplace la courbe C_3 par une courbe quelconque C_k du réseau; le lieu des points S_{1k} analogues à S_{13} est donc une droite tangente à C_1.

3. Il résulte d'abord du théorème précédent que les tangentes principales des courbes d'un faisceau passent toutes par le sommet de ce faisceau. De là une construction facile de la tangente principale d'une courbe C; si l'on mène une autre courbe quelconque C_k et si l'on détermine le sommet du faisceau déterminé par ces courbes, la tangente principale de C sera la troisième tangente que l'on peut mener du sommet à C.

4. Réciproquement, étant donnée une droite dans le plan, elle est la tangente principale d'une seule courbe du réseau. En effet, il y a dans chaque faisceau deux courbes qui passent par le sommet de ce faisceau; chacune d'elles touche en ce point une des droites du couple et (Cf. § 3) a cette droite pour tangente principale.

Considérons la droite donnée comme une huitième tangente déterminant un faisceau, et prenons sur cette droite le sommet du faisceau, c'est-à-dire le point où elle est coupée par la neuvième tangente commune à toutes les courbes qui en font partie. La courbe cherchée est celle du faisceau qui touche la droite en ce point.

5. Les théorèmes contenus dans les §§ 1, 2, 3 et 4 renfermant tous les éléments nécessaires pour la solution du problème proposé, on peut immédiatement, et d'une façon très-nette, construire la courbe générale du quatrième ordre qui a pour tangentes doubles les sept droites G.

Partageons le *réseau* des courbes de troisième classe en *faisceaux,* de telle sorte que pour chacun d'eux le couple des tangentes se compose de deux droites coïncidentes. Toutes les courbes d'un tel faisceau se touchent en un point qui sera le sommet du faisceau ; la courbe du quatrième ordre est le lieu de ces sommets.

En effet, d'après le § 3, toutes les tangentes principales des courbes d'un de ces faisceaux passent par leur point de contact commun ; on obtiendra donc sur chaque courbe C les points du lieu cherché en prenant les intersections de cette courbe avec sa tangente principale. Ce qui donnera quatre points distincts du point de contact, puisque la courbe est du sixième ordre. D'après le § 4, toute droite du plan est la tangente principale d'une courbe du réseau ; il y aura sur cette droite, d'après ce que je viens de dire, quatre points du lieu ; ce lieu est donc une courbe du quatrième degré K^4.

Reste à faire voir que K^4 a pour tangentes doubles les sept droites G. Je remarque à cet effet que le réseau renferme sept courbes particulières de troisième classe, dont chacune a pour tangente double une des droites G et est ainsi complétement déterminée. Cette tangente est en même temps (§ 4) la tangente principale de la courbe correspondante, et elle la coupe en deux couples de points coïncidents ; elle est donc aussi une tangente double de K^4, et l'on peut remarquer que les points de contact sont les mêmes pour K^4 et pour la courbe de troisième classe.

6. Le réseau renferme vingt-huit courbes particulières dont les tangentes principales sont les vingt-huit tangentes doubles de K^4. Sept de ces courbes sont, comme je viens de le montrer, les courbes du réseau qui ont pour tangente double une des droites G. Les autres sont les courbes qui se composent d'un point et d'une conique,

c'est-à-dire du point de rencontre de deux droites G et de la conique qui touche les cinq autres de ces droites. Leur nombre est évidemment $\frac{7.6}{2} = 21$.

Je désignerai la conique qui touche les droites G_3, G_4, G_5, G_6 et G_7 par la notation (3 4 5 6 7), et le point d'intersection des deux droites G_1 et G_2 par la notation (1 2).

Cela posé, les tangentes principales des vingt et une courbes composées dont je viens de parler sont les vingt et une autres tangentes doubles de K^4; toute section conique qui touche cinq des droites G touche une sixième tangente double de K^4, que l'on peut construire au moyen de l'hexagone de Brianchon.

7. Pour démontrer cette proposition, je remarque que, quand on considère comme courbe de sixième ordre une courbe de troisième classe se composant d'un point et d'une conique, cette courbe doit être regardée comme composée de la conique et des deux tangentes menées du point à la conique (chacune de ces tangentes devant être comptée deux fois). Toute tangente à cette conique rencontre donc la courbe en deux couples de points coïncidents; cela est vrai en particulier pour la tangente principale de la courbe, qui, par suite, est une tangente double de K^4.

Si l'on construit une quelconque des vingt et une coniques qui touchent cinq des droites G, (3 4 5 6 7) par exemple, la tangente principale de cette courbe est une tangente double de K^4, et ses points de contact avec K^4 sont les points où elle rencontre les tangentes menées de (1 2) à la conique.

(*La suite prochainement.*)