NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

H. RESAL

Interprétation géométrique de la trajectoire apparente d'un projectile dans le vide

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 11 (1872), p. 433-438

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1872_2_11__433_0>

INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE

de la trajectoire apparente d'un projectile dans le vide;

Par M. H. RESAL.

Considérons une sphère matérielle (S) animée d'un mouvement de rotation uniforme autour d'un diamètre OZ, et douée de la propriété d'attirer les éléments matériels placés à distance suivant le rayon en vertu d'une force constante dont nous désignerons par g l'accélération.

Supposons qu'un point m animé d'une vitesse relative initiale déterminée par rapport à (S) décrive un arc de trajectoire assez petit pour que l'on puisse considérer comme constante, pendant le parcours de l'arc, la direction de g.

Dans ces conditions, Bour, dans son Mémoire sur les mouvements relatifs (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*; 1863), prouve que la trajectoire apparente du mobile n'est autre que celle qui résulterait de son mouvement sur une parabole du second degré, dont le plan tournerait autour d'un axe parallèle à OZ, compris dans le méridien du lieu, avec une vitesse angulaire égale et contraire à celle de la sphère. Ce résultat est obtenu en faisant l'application des équations du mouvement relatif auxquelles Bour est parvenu à donner la forme canonique.

J'ai cherché, immédiatement après la publication de ce travail, à établir directement le théorème ci-dessus énoncé sans employer les équations de la Mécanique analytique, étendues, comme je viens de le dire, aux mouvements relatifs, qui supposent la connaissance des hautes Mathématiques, et je ne suis pas arrivé au résultat ci-dessus énoncé. Nous devions examiner ensemble, Bour et moi, cette question, lorsque la mort est venue surprendre le savant géomètre.

J'avais perdu de vue le problème dont il s'agit, lorsque, dernièrement, j'ai retrouvé quelques notes qui remontent à huit ans environ. J'ai pensé qu'il ne serait pas sans intérêt d'en faire connaître la substance et de fixer définitivement un point en litige des applications si peu nombreuses de la théorie des mouvements relatifs.

Soient :

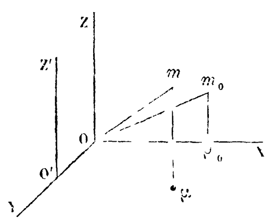
O le centre de la sphère ;

OX la perpendiculaire à OZ dans le plan méridien passant par un point quelconque m_0 de la trajectoire;

OY la perpendiculaire en O au plan ZOX;

μ la projection, sur le plan de l'équateur YOX, d'une position quelconque m du mobile;

x, y, z les coordonnées de m parallèles à OX, OY, OZ;



n la rotation constante de (S) autour de OZ dont le sens est supposé de la droite vers la gauche pour l'observateur couché suivant l'axe en ayant les pieds en O;

ω l'angle m_0OZ formé par le rayon m_0O avec OZ, considéré comme très-sensiblement égal à celui que forme, avec le même axe, le rayon mO correspondant à une position quelconque m du mobile pour l'étendue de l'arc parcouru.

Si l'on considère aussi comme sensiblement constante la direction de g, on devrait, pour la même raison, admettre que l'accélération centrifuge ne doit varier ni en grandeur ni en direction. Cette restriction n'ayant pas été faite par Bour, nous la considérerons d'abord comme non avenue.

L'accélération centrifuge donne les composantes

$$n^2 x \quad \text{suivant} \quad \mathrm{OX},$$
$$n^2 y \quad \text{suivant} \quad \mathrm{OY},$$

et l'accélération centrifuge composée les suivantes, en partant de théorèmes que j'ai donnés dans mon *Traité de Cinématique pure*,

$$-2n\frac{dy}{dt} \quad \text{suivant} \quad \mathrm{OX},$$
$$2n\frac{dx}{dt} \quad \text{suivant} \quad \mathrm{OY}.$$

Il vient donc

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g\sin\omega + n^2x - 2n\frac{dy}{dt},$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = n^2y + 2n\frac{dx}{dt},$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} = -g\cos\omega,$$

ou

$$(1) \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2x}{dt^2} + 2n\frac{dy}{dt} = n^2x - g\sin\omega, \\ &\frac{d^2y}{dt^2} - 2n\frac{dx}{dt} = n^2y, \\ &\frac{d^2z}{dt^2} = -g\cos\omega. \end{aligned}\right.$$

Les premiers membres de ces équations ne sont autres que ceux des formules dites de *Poisson*, appliquées au pôle.

Ces équations ont pour intégrales

$$(2)\quad\begin{cases} x - \dfrac{g\sin\omega}{n^2} = \mathrm{A}\cos(nt+\alpha) + \mathrm{B}t\cos(nt+\beta), \\ y = \mathrm{A}\sin(nt+\alpha) + \mathrm{B}t\sin(nt+\beta), \\ z = -\dfrac{g\cos\omega}{2}t^2 + \mathrm{C}t + \mathrm{D}, \end{cases}$$

A, B, C, D, α, β étant six constantes que l'on déterminera par les conditions que, pour $t = 0$, on ait

$$x = x_0,\quad y = 0,\quad z = z_0,\quad \frac{dx}{dt} = x'_0,\quad \frac{dy}{dt} = y'_0,\quad \frac{dz}{dt} = z'_0.$$

Mais, à l'inspection des équations (2), on voit de suite que la trajectoire ne peut pas être comprise dans un plan tournant autour de l'axe O′Z′ parallèle à OZ, distant de ce dernier de $\mathrm{OO'} = \dfrac{g\sin\omega}{n^2}$ (OZ′ est la position que Bour assigne à l'axe de rotation du plan de sa parabole).

Supposons maintenant, comme il est convenable de le faire, que l'accélération centrifuge soit considérée comme constante en grandeur et en direction, et désignons alors par g la résultante de cette accélération et de l'accélération attractive de (S), O devenant le point où sa direction rencontre l'axe de rotation OZ. Les formules dont nous devrons faire usage ne seront autres que les équations (1), dans lesquelles nous négligerons les termes n^2x, n^2y, et nous aurons

$$(3)\quad\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + 2n\dfrac{dy}{dt} = -g\sin\omega, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} - 2n\dfrac{dx}{dt} = 0, \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} = -g\cos\omega, \end{cases}$$

équations dont les intégrales sont

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} & x = \mathrm{A}\cos(2nt + \alpha) + \mathrm{B}, \\ & y + \frac{g\sin\omega}{2n}t = \mathrm{A}\sin(2nt + \alpha) + \mathrm{C}\ (^*), \\ & z = -\frac{g\cos\omega}{2}t^2 + \mathrm{D}t + \mathrm{E}. \end{aligned}\right.$$

On déterminera les constantes A, B, C, D, E, α de la même manière que ci-dessus.

Posons

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} & x_1 = \mathrm{A}\cos(2nt + \alpha), \\ & y_1 = \mathrm{A}\sin(2nt + \alpha), \\ & z_1 = -\frac{g\cos\omega}{2}t^2 + \mathrm{D}t; \end{aligned}\right.$$

x_1, y_1, z_1 seront les coordonnées du mobile par rapport à trois axes parallèles aux premiers, et dont l'origine O_1 a pour coordonnées

$$(6)\qquad x = \mathrm{B},\quad y = \mathrm{C} - \frac{g\sin\omega}{2n}t,\quad z = \mathrm{E}.$$

Le système de ces trois derniers axes est aussi animé d'un mouvement de translation rectiligne uniforme parallèle à OY avec la vitesse $\frac{g\sin\omega}{2n}$.

Les deux premières des équations (5) montrent que la projection du mobile sur le plan $\mathrm{X}_1\mathrm{O}_1\mathrm{Y}_1$ est un point situé à une distance constante $\sqrt{\mathrm{A}}$ de O_1 et sur un rayon $\mathrm{O}_1\mu_1$, qui, en projection sur le plan XOY, tourne relativement au mouvement de (S) avec la vitesse angulaire $2n$ en

---

(*) Il est facile de voir que, si $n = 0$, les deux premières de ces équations se réduisent à

$$x = -\frac{g\sin\omega}{2}t^2 + \mathrm{M}t + \mathrm{N},\quad y = \mathrm{M}'t + \mathrm{N}',$$

M, M′, N, N′ étant des constantes arbitraires.

sens inverse de celle n de OX, c'est-à-dire avec la vitesse angulaire n dans l'espace absolu.

On peut donc dire que la trajectoire relative du mobile peut être considérée comme le résultat d'un mouvement rectiligne uniformément varié, parallèle à l'axe de rotation de (S), dans un plan tournant avec une vitesse angulaire égale et contraire à celle de ce système, autour d'une parallèle à ce dernier axe, elle-même animée d'un mouvement de translation uniforme perpendiculaire au méridien du lieu.

Quoique cette interprétation géométrique soit loin d'être élégante, il ne m'a pas paru inutile de la signaler.