

GÉRONO

**De la réalité des racines de
l'équation du troisième degré en S :**

$$\Delta = \begin{vmatrix} A - S & B'' & B' \\ B'' & A' - S & B \\ B' & B & A'' - S \end{vmatrix} = 0, \text{ où}$$

**B, B', B'' représentent des quantités
différentes de zéro**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 11
(1872), p. 305-308

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1872_2_11__305_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1872, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

DE LA RÉALITÉ DES RACINES
DE L'ÉQUATION DU TROISIÈME DEGRÉ EN S :

$$\Delta = \begin{vmatrix} A - S & B'' & B' \\ B'' & A' - S & B \\ B' & B & A'' - S \end{vmatrix} = 0,$$

où B, B', B'' représentent des quantités différentes de zéro.

On a, en multipliant par B, B', B'' les éléments des lignes horizontales,

$$\Delta_{BB'B''} = \begin{vmatrix} (A - S)B & BB'' & BB' \\ B'B'' & (A' - S)B' & BB' \\ B'B'' & BB'' & (A'' - S)B'' \end{vmatrix};$$

d'où

$$\Delta BB'B'' = \begin{vmatrix} (A-S)B - B'B'' & BB'' - (A'-S)B' & 0 \\ 0 & (A'-S)B' - BB'' & BB' - (A''-S)B'' \\ B'B'' & BB'' & (A''-S)B'' - BB' + BB' \end{vmatrix};$$

et, en divisant respectivement par B, B', B'' les éléments des colonnes de rangs 1, 2, 3 de ce dernier déterminant,

$$\Delta = \begin{vmatrix} (A-S) - \frac{B'B''}{B} & \frac{BB''}{B'} - (A'-S) & 0 \\ 0 & (A'-S) - \frac{BB''}{B'} & \frac{BB'}{B''} - (A''-S) \\ \frac{B'B''}{B} & \frac{BB''}{B'} & (A''-S) - \frac{BB'}{B''} + \frac{BB'}{B''} \end{vmatrix}.$$

En posant

$$A - \frac{B'B''}{B} = a, \quad A' - \frac{BB''}{B'} = a', \quad A'' - \frac{BB'}{B''} = a'',$$

il vient

$$(1) \quad \Delta = \begin{vmatrix} a - S & S - a' & 0 \\ 0 & a' - S & S - a'' \\ \frac{B'B''}{B} & \frac{BB''}{B'} & a'' - S + \frac{BB'}{B''} \end{vmatrix}.$$

Actuellement, supposons que les quantités a, a', a'' soient inégales et qu'on ait, par exemple, $a < a' < a''$.

Si l'on remplace successivement S par a, a', a'' , les valeurs correspondantes de Δ , données par l'égalité (1), seront :

$$\frac{B'B''}{B}(a-a')(a-a''), \quad -\frac{BB''}{B'}(a-a')(a'-a''), \quad \frac{BB'}{B''}(a-a'')(a'-a'').$$

ou

$$\frac{BB'B''}{B} (a-a')(a-a''), \quad - \frac{BB'B''}{B'^2} (a-a')(a'-a''), \quad \frac{BB'B''}{B''^2} (a-a'')(a'-a''),$$

et, comme les produits $(a-a')(a-a'')$, $(a-a')(a'-a'')$, $(a-a'')(a'-a'')$ sont positifs, on voit que les substitutions de a et a' à S dans Δ donnent des résultats de signes contraires, et qu'il en est de même des substitutions de a' et a'' ; par conséquent, l'équation $\Delta = 0$ a une racine comprise entre a et a' , et une autre racine comprise entre a' et a'' .

En outre, pour $S = -\infty$, $\Delta = +\infty$, et pour $S = +\infty$, $\Delta = -\infty$; donc, suivant que le produit $BB'B''$ est positif ou négatif, la troisième racine de l'équation $\Delta = 0$ est plus grande que a'' ou plus petite que a .

Ainsi, dans l'hypothèse de l'inégalité des quantités a , a' , a'' , les trois racines de l'équation $\Delta = 0$ sont réelles et inégales.

Si deux des quantités a , a' , a'' étaient égales entre elles, et qu'on eût, par exemple, $a = a'$, l'égalité (1) deviendrait

$$\Delta = (a - S) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & a - S & S - a'' \\ \frac{B'B''}{B} & \frac{BB''}{B'} & (a'' - S) + \frac{BB'}{B''} \end{vmatrix};$$

l'une des racines de l'équation $\Delta = 0$ serait a , et les deux autres seraient données par la résolution de l'équation du second degré

$$(2) \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & a - S & S - a'' \\ \frac{B'B''}{B} & \frac{BB''}{B'} & a'' - S) + \frac{BB'}{B''} \end{vmatrix} = 0.$$

En remplaçant successivement l'inconnue S par a et a'' , le premier membre de l'équation (2) prend les valeurs

$$- \left(\frac{BB''}{B'} + \frac{B'B''}{B} \right) (a - a''), \quad + \frac{BB'}{B''} (a - a''),$$

ou

$$- BB'B'' \left(\frac{1}{B^2} + \frac{1}{B'^2} \right) (a - a''), \quad + BB'B'' \frac{1}{B''^2} (a - a''),$$

qui ont des signes contraires. Donc cette équation a une racine comprise entre a et a'' . L'autre racine est plus grande que a'' , ou moindre que a , suivant que $BB'B''$ est positif ou négatif.

Donc, dans ce second cas, l'équation $\Delta = 0$ a encore ses trois racines réelles et inégales.

Enfin, lorsque $a = a' = a''$, l'égalité (1) prend la forme

$$\Delta = (a - S)^2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ \frac{B'B''}{B} & \frac{BB''}{B'} & (a - S) + \frac{BB'}{B''} \end{vmatrix}.$$

L'équation proposée $\Delta = 0$ a deux racines égales à a , et la troisième, déterminée par l'équation du premier degré

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ \frac{B'B''}{B} & \frac{BB''}{B'} & (a - S) + \frac{BB'}{B''} \end{vmatrix} = 0,$$

a pour valeur $a + \frac{B'B''}{B} + \frac{BB''}{B'} + \frac{BB'}{B''}$.

Il en faut conclure que, dans tous les cas, l'équation proposée $\Delta = 0$ a ses trois racines réelles. G.