E. DEWULF

Des intersections des faisceaux de courbes et des faisceaux de leurs polaires inclinées

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 11 (1872), p. 297-305

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1872_2_11__297_1>

DES INTERSECTIONS DES FAISCEAUX DE COURBES ET DES FAISCEAUX DE LEURS POLAIRES INCLINÉES;

PAR M. E. DEWULF.

I. Soient $F(x, y) = 0$ et $f(x, y) = 0$ les équations de deux courbes de degré n, $F(x, y) + \lambda f(x, y) = 0$ représente un faisceau de courbes d'ordre n, pivotant autour de n^2 points fixes.

Nous avons nommé (*) *première polaire inclinée* d'un point P, par rapport à une courbe C^n, le lieu des points où toutes les droites issues de P rencontrent la courbe sous un angle constant, et *coefficient d'inclinaison* la tangente k de cet angle.

Les premières polaires inclinées d'un point P, par rap-

(*) *Voir* 1re série, t. XVIII, p. 232

port aux différentes courbes d'un faisceau $F + \lambda f = 0$, forment un faisceau $\pi + \lambda\varphi = 0$ homographique au premier et de même ordre. Le lieu des intersections des courbes correspondantes de ces deux faisceaux est représenté par l'équation $F\varphi - f\pi = 0$ de degré $2n$. Désignons cette courbe par ψ_k^{2n}, k étant le coefficient d'inclinaison.

II. Soient α, β les coordonnées rectangulaires du point P, le faisceau de ses premières polaires inclinées, par rapport à $F + \lambda f = 0$, a pour équation

$$(\beta - y)\left(\frac{dF}{dy} + k\frac{dF}{dx}\right) + (\alpha - x)\left(\frac{dF}{dx} - k\frac{dF}{dy}\right)$$
$$+ \lambda\left[(\beta - y)\left(\frac{df}{dy} + k\frac{df}{dx}\right) + (\alpha - x)\left(\frac{df}{dx} - k\frac{df}{dy}\right)\right] = 0,$$

et l'équation de ψ_k^{2n} est

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} & f\left\{\frac{dF}{dy}[\beta - y - k(\alpha - x)] + \frac{dF}{dx}[\alpha - x + k(\beta - y)]\right\} \\ & - F\left\{\frac{df}{dy}[\beta - y - k(\alpha - x)] + \frac{df}{dx}[\alpha - x + k(\beta - y)]\right\} = 0. \end{aligned}\right.$$

Cette équation peut aussi être mise sous la forme

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} & (\beta - y)\left[f\left(\frac{dF}{dy} + k\frac{dF}{dx}\right) - F\left(\frac{df}{dy} + k\frac{df}{dx}\right)\right] \\ & + (\alpha - x)\left[f\left(\frac{dF}{dx} - k\frac{dF}{dy}\right) - F\left(\frac{df}{dx} - k\frac{df}{dy}\right)\right] = 0, \end{aligned}\right.$$

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} & f\left[\frac{dF}{dy}(\beta - y) + \frac{dF}{dx}(\alpha - x)\right] - F\left[\frac{df}{dy}(\beta - y) + \frac{df}{dx}(\alpha - x)\right] \\ & + k\left\{f\left[\frac{dF}{dx}(\beta - y) - \frac{dF}{dy}(\alpha - x)\right] - F\left[\frac{df}{dx}(\beta - y) - \frac{df}{dy}(\alpha - x)\right]\right\} = 0. \end{aligned}\right.$$

On conclut de l'équation (1) que, *quelles que soient* *les valeurs α, β et k, la courbe ψ_k^{2n} passe par les n^2 points fixes du faisceau* $F + \lambda f = 0$; et de l'équation (2) que, *quelle que soit la valeur de k, la courbe ψ_k^{2n} passe par le point* P.

Cette équation (2) est aussi satisfaite, quelles que soient les valeurs de α, β, si l'on a

$$(a)\qquad \left\{\begin{array}{l} f\left(\dfrac{dF}{dy} + k\dfrac{dF}{dx}\right) - F\left(\dfrac{df}{dy} + k\dfrac{df}{dx}\right) = 0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\ f\left(\dfrac{dF}{dx} - k\dfrac{dF}{dy}\right) - F\left(\dfrac{df}{dx} - k\dfrac{df}{dy}\right) = 0. \end{array}\right.$$

Ces équations peuvent s'écrire sous la forme

$$(b)\qquad \left\{\begin{array}{l} f\dfrac{dF}{dy} - F\dfrac{df}{dy} = -k\left(f\dfrac{dF}{dx} - F\dfrac{df}{dx}\right),\\ f\dfrac{dF}{dx} - F\dfrac{df}{dx} = +k\left(f\dfrac{dF}{dy} - F\dfrac{df}{dy}\right), \end{array}\right.$$

qui fait voir qu'elles ne peuvent être satisfaites simultanément pour une même valeur de k que si l'on a

$$(c)\qquad f\frac{dF}{dy} - F\frac{df}{dy} = 0 \quad \text{et} \quad f\frac{dF}{dx} - F\frac{df}{dx} = 0.$$

et alors elles le sont, quelle que soit la valeur de k.

Donc les courbes ψ_k^{2n}, qui correspondent à tous les points du plan de $F + \lambda f = 0$, et pour toutes les valeurs de k, passent par les $(2n-1)^2$ points d'intersection des courbes (c).

Remarquons que ces $(2n-1)^2$ points se trouvent sur la courbe $\dfrac{df}{dy}\dfrac{dF}{dx} - \dfrac{df}{dx}\dfrac{dF}{dy} = 0$ d'ordre $2(n-1)$, qui passe par les points où les courbes $F = 0$ et $f = 0$ se coupent orthogonalement; nous trouverons plus loin la signification précise de ces points.

L'équation (1) est satisfaite aussi si l'on a simultanément

$$F = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dF}{dy}[\beta - y - k(\alpha - x)] + \frac{dF}{dx}[\alpha - x + k(\beta - y)] = 0,$$

ou

$$f = 0 \quad \text{et} \quad \frac{df}{dy}[\beta - y - k(\alpha - x)] + \frac{df}{dx}[\alpha - x + k(\beta - y)] = 0,$$

ou encore

$$\frac{dF}{dy}[\beta - y - k(\alpha - x)] + \frac{dF}{dx}[\alpha - x + k(\beta - y)] = 0$$

et

$$\frac{df}{dy}[\beta - y - k(\alpha - x)] + \frac{df}{dx}[\alpha - x + k(\beta - y)] = 0.$$

c'est-à-dire que la courbe ψ_k^{2n}, qui correspond à un point P, pour une valeur déterminée de k, passe : 1° *par les points d'intersection de* $F = 0$ *et de la première polaire inclinée de* P *par rapport à* F ; 2° *par les points d'intersection de* $f = 0$ *et de la première polaire inclinée de* P *par rapport à* f ; 3° *par les points d'intersection des premières polaires inclinées de* P *par rapport à* $F = 0$ *et* $f = 0$.

L'équation (3) montre que : *les courbes* ψ_k^{2n}, *qui correspondent à un point donné* P, *forment, pour les valeurs variables de* k, *un faisceau d'ordre* $2n$, *dont les* $4n^2$ *pivots peuvent être déterminés par les courbes* ψ_0^{2n} *et* ψ_∞^{2n} *qui correspondent à* $k = 0$ *et* $k = \infty$.

III. Supposons maintenant que le point P parcoure une droite L dont l'équation est $y = Ax + B$. Nous aurons, entre α et β, la relation $\beta = A\alpha + B$; portons cette valeur de β dans l'équation (2), nous aurons

$$
(d)\left\{\begin{aligned}
&\alpha\left\{\begin{aligned}&A\left[f\left(\frac{dF}{dy}+k\frac{dF}{dx}\right)-F\left(\frac{df}{dy}+k\frac{df}{dx}\right)\right]\\&+f\left(\frac{dF}{dx}-k\frac{dF}{dy}\right)-F\left(\frac{df}{dx}-k\frac{df}{dy}\right)\end{aligned}\right\}\\
&+(B-y)\left[f\left(\frac{dF}{dy}+k\frac{dF}{dx}\right)-F\left(\frac{df}{dy}+k\frac{df}{dx}\right)\right]\\
&-x\left[f\left(\frac{dF}{dx}-k\frac{dF}{dy}\right)-F\left(\frac{df}{dx}-k\frac{df}{dy}\right)\right]=0.
\end{aligned}\right.
$$

Cette équation est satisfaite, quelle que soit la valeur de α, si l'on pose simultanément

$$
(e)\left\{\begin{aligned}
&A\left[f\left(\frac{dF}{dy}+k\frac{dF}{dx}\right)-F\left(\frac{df}{dy}+k\frac{df}{dx}\right)\right]\\
&+f\left(\frac{dF}{dx}-k\frac{dF}{dy}\right)-F\left(\frac{df}{dx}-k\frac{df}{dy}\right)=0,
\end{aligned}\right.
$$

$$
(f)\left\{\begin{aligned}
&(B-y)\left[f\left(\frac{dF}{dy}+k\frac{dF}{dx}\right)-F\left(\frac{df}{dy}+k\frac{df}{dx}\right)\right]\\
&-x\left[f\left(\frac{dF}{dx}-k\frac{dF}{dy}\right)-F\left(\frac{df}{dx}-k\frac{df}{dy}\right)\right]=0
\end{aligned}\right.
$$

Ces courbes se coupent en $2n(2n-1)$ points pour une même valeur de k.

Donc, *si un point* P *parcourt une droite* L, *les courbes* ψ_k^{2n} *correspondantes, pour une valeur constante de* k, *forment un faisceau d'ordre* $2n$ *qui pivote autour de* $2n(2n-1)$ *points fixes.*

Si la droite L passe à l'infini, le nombre des pivots se réduit à $(2n-1)^2$, et ils sont déterminés par les équations

$$
(g)\qquad f\left(\frac{dF}{dy}+k\frac{dF}{dx}\right)-F\left(\frac{df}{dy}+k\frac{df}{dx}\right)=0,
$$

$$
(h)\qquad f\left(\frac{dF}{dx}-k\frac{dF}{dy}\right)-F\left(\frac{df}{dx}-k\frac{df}{dy}\right)=0.
$$

Remarquons que les équations (g) et (h) sont précisément les mêmes que les équations (a) ; elles se réduisent donc aux équations (c), et les $(2n-1)^2$ points d'intersection des courbes (c) ne sont autres que les points qui correspondent à la droite de l'infini.

Remarquons encore que les équations (e) et (f) sont satisfaites, quelles que soient les valeurs de A et B, quand les équations (g) et (h) le sont; donc, les $(2n-1)^2$ points qui correspondent à la droite de l'infini sont au nombre des $2n(2n-1)$ points qui correspondent à une droite L.

Mettons les équations (e) et (f) sous la forme

$$\mathrm{A}\left[f\left(\frac{d\mathrm{F}}{dy}+k\frac{d\mathrm{F}}{dx}\right)-\mathrm{F}\left(\frac{df}{dy}+k\frac{df}{dx}\right)\right]$$
$$=-f\left(\frac{d\mathrm{F}}{dx}-k\frac{d\mathrm{F}}{dy}\right)+\mathrm{F}\left(\frac{df}{dx}-k\frac{df}{dy}\right),$$
$$(\mathrm{B}-y)\left[f\left(\frac{d\mathrm{F}}{dy}+k\frac{d\mathrm{F}}{dx}\right)-\mathrm{F}\left(\frac{df}{dy}+k\frac{df}{dx}\right)\right]$$
$$=-x\left[f\left(\frac{d\mathrm{F}}{dx}-k\frac{d\mathrm{F}}{dy}\right)-\mathrm{F}\left(\frac{df}{dx}-k\frac{df}{dy}\right)\right],$$

et divisons-les membre à membre, nous obtiendrons

$$y=\mathrm{A}x+\mathrm{B},$$

c'est l'équation de la droite L; en la combinant avec l'équation (e), elle détermine $2n-1$ points en ligne droite qui appartiennent aux $2n(2n-1)$ points qui correspondent à une droite L.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Quand un point P *parcourt une droite* L, *les courbes* ψ_{K}^{2n} *qui correspondent à chaque position de* P *forment un faisceau d'ordre* $2n$ *qui pivote autour de* $2n(2n-1)$ *points fixes, savoir : les* $(2n-1)^2$ *points qui correspon-*

dent à la droite de l'infini, et $2n-1$ points situés sur la droite L *qui passent à l'infini avec cette droite.*

Des déductions du paragraphe II nous pouvons aussi conclure que

Toutes les courbes ψ_k^{2n} qui correspondent à tous les points du plan du faisceau $F+\lambda f=0$, *et pour toutes les valeurs de k, se coupent en $n^2+(2n-1)^2$ points fixes qui sont : les $(2n-1)^2$ points qui correspondent à la droite de l'infini, et les n^2 pivots du faisceau* $F+\lambda f=0$.

Voyons maintenant ce que deviennent les $2n(2n-1)$ points fixes qui correspondent à L pour une valeur donnée de k, quand k varie de $+\infty$ à $-\infty$. Pour cela, éliminons k entre les équations (e) et (f); nous obtenons

$$(Ax+B-y)\left[\left(f\frac{dF}{dy}-F\frac{dx}{df}\right)^2+\left(f\frac{dF}{dx}-F\frac{df}{dy}\right)^2\right]=0,$$

qui se décompose en

$$y=Ax+B \quad \text{et} \quad \frac{dF}{dy}\frac{df}{dx}-\frac{dF}{dx}\frac{df}{dy}=0.$$

Donc, *quand le coefficient k varie de $+\infty$ à $-\infty$, $2n-1$ des points fixes qui correspondent à* L, *décrivent la droite* L, *et les $(2n-1)^2$ autres points qui correspondent à* L *décrivent la courbe* $\frac{dF}{dy}\frac{df}{dx}-\frac{dF}{dx}\frac{df}{dy}=0$.

Supposons que le point P parcoure une courbe

$$M(x,y)=0,$$

et cherchons l'enveloppe des courbes ψ_k^{2n} correspondantes à chacune des positions de P, k restant constant.

Nous avons

$$(1)\qquad M(\alpha, \beta) = 0,$$

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &(\beta - y)\left[f\left(\frac{dF}{dy} + k\frac{dF}{dx}\right) - F\left(\frac{df}{dy} + k\frac{df}{dx}\right)\right] \\ &+ (\alpha - x)\left[f\left(\frac{dF}{dx} - k\frac{dF}{dy}\right) - F\left(\frac{df}{dx} - k\frac{df}{dy}\right)\right] = 0, \end{aligned}\right.$$

$$(3)\qquad \frac{dM}{d\alpha} + \frac{dM}{d\beta}\,\frac{d\beta}{d\alpha} = 0,$$

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d\beta}{d\alpha}\left[f\left(\frac{dF}{dy} + k\frac{dF}{dx}\right) - F\left(\frac{df}{dy} + k\frac{df}{dx}\right)\right] \\ &+ f\left(\frac{dF}{dx} - k\frac{dF}{dy}\right) - F\left(\frac{df}{dx} + k\frac{df}{dy}\right) = 0. \end{aligned}\right.$$

Éliminant $\frac{d\beta}{d\alpha}$ entre (3) et (4), et combinant la résultante avec (2), nous trouvons

$$(5)\qquad (\beta - y)\frac{dM}{d\beta} + (\alpha - x)\frac{dM}{d\alpha} = 0.$$

Pour obtenir l'enveloppe, il faut éliminer α et β entre les équations (1), (2) et (5).

Cherchons aussi le lieu des $2n(2n - 1)$ points qui correspondent à une tangente à $M(x, y) = 0$, quand cette tangente roule autour de la courbe.

x', y' étant les coordonnées d'un point de M, l'équation de la tangente en ce point est

$$(y - y')\frac{dM}{dy'} + (x - x')\frac{dM}{dx'} = 0.$$

Dans les équations (e) et (f) qui déterminent les $2n(2n - 1)$ points qui correspondent à une droite, remplacons A par $-\frac{\frac{dM}{dx'}}{\frac{dM}{dy'}}$ et B par $y'+x'\frac{\frac{dM}{dx'}}{\frac{dM}{dy'}}$ nous trouvons :

$$(6)\qquad (y-y')\frac{dM}{dy'}+(x-x')\frac{dM}{dx'}=0,$$

$$(7)\left\{\begin{aligned}&(y-y')\left[f\left(\frac{dF}{dy}+k\frac{dF}{dx}\right)-F\left(\frac{df}{dy}+k\frac{df}{dx}\right)\right]\\&+(x-x')\left[f\left(\frac{dF}{dx}-k\frac{dF}{dy}\right)-F\left(\frac{df}{dx}-k\frac{df}{dy}\right)\right]=0.\end{aligned}\right.$$

Pour trouver le lieu cherché, il faut éliminer y' et x' entre les équations (6), (7) et $M(x',y')=0$.

Or ces équations sont exactement les mêmes que les équations (1), (2), (5).

Donc *l'enveloppe des courbes* ψ_k^{2n} *qui correspondent aux points d'une courbe* M *est la même courbe que le lieu décrit par les* $2n(2n-1)$ *points fixes des faisceaux qui correspondent aux tangentes à* M.