Nouvelles annales de mathématiques

Questions

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 11 (1872), p. 143-144

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1872_2_11__143_0>

QUESTIONS.

1065. On donne une conique et deux points A et B dans l'espace. Par ces deux points, on mène un plan qui rencontre la conique en deux points A′ et B′. Trouver le lieu du point M d'intersection des couples de droites (AA′, BB′) et (AB′, BA′). Cas particuliers.

(H. Brocard.)

1066. Quelque valeur entière et positive que l'on donne à a et à m, on a

$$a^{2m+3} < \frac{a(a+1)(2a+1)(3a^2+3a+1)^m}{2.3^m} < (a+1)^{2m+3}.$$

(S. Realis.)

1067. Parmi toutes les ellipses qui passent par quatre points, trouver celle dont l'aire est minimum.

(T. Doucet.)

1068. Désignons par t_{ij} la longueur de la tangente commune à deux cercles i et j. Il faut et il suffit, pour que quatre cercles 1, 2, 3, 4 soient tangents à un même cercle, que l'on ait

$$t_{12}\,t_{34} \pm t_{13}\,t_{24} \pm t_{14}\,t_{23} = 0.$$

Application aux quatre cercles inscrits et exinscrits à un triangle.

1069. Si trois coniques ont deux à deux un foyer commun, leurs cordes communes concourent trois à trois. Cas particuliers. (E. Lemoine.)

1070. L'équation $\dfrac{du}{dx} = \sqrt{1 + au^2 + bu^4}$ définit une fonction u, si l'on donne la condition $u = 0$, pour $x = 0$.

C'est une fonction impaire de x, et, dans son développement suivant les puissances de x, le coefficient de $\dfrac{x^{2n+1}}{1.2.3\ldots(2n+1)}$ est de la forme

$$a^n + \lambda_1 a^{n-2} b + \lambda_2 a^{n-4} b^2 + \lambda_3 a^{n-6} b^3 + \ldots.$$

On a

$$\lambda_1 = \frac{3^{2n+1} - 3}{16} - \frac{3n}{2},$$

$$\lambda_2 = \frac{5^{2n+1} - 5}{256} + \frac{3^{2n+3} - 3^3}{64} + \frac{9^{n^2}}{8} - \left(\frac{3^{2n+2}}{32} + \frac{39}{16}\right) n.$$

Tous ces nombres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ sont entiers. Démontrer les résultats précédents. (F. Didon.)

1071. Les deux circonférences menées par les foyers d'une conique, et qui touchent une tangente de cette conique, se coupent toujours sous le même angle.

(H. Faure.)

1072. Une sphère de rayon constant se déplace en restant tangente à une droite et à un cylindre de révolution donnés; trouver le lieu du point de contact sur le cylindre. (Mannheim.)

1073. L'équation

$$x^3 - \frac{4+p}{3} x^2 + \frac{p(1+p)}{2.3} x + \frac{(2-p)p(1+p)}{2.3} = 0,$$

dans laquelle $0 < p < 1$, a une racine α comprise entre zéro et l'unité, et l'on a

$$\int_0^\alpha x^{-p}(1-x)^{p-1}\,dx + \frac{2.3.4}{(2-p)(1-p)p(1+p)} \int_0^{1-\alpha} x^{1+p}(1-x)^{2-p}\,dx = \frac{\pi}{\sin p\pi}.$$

(S. Realis.)