

CHASLES

Détermination, par le principe de correspondance, de la classe de la développée et de la caustique par réflexion d'une courbe géométrique d'ordre m et de la classe n

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 10 (1871), p. 97-104

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1871_2_10__97_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1871, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**DÉTERMINATION, PAR LE PRINCIPE DE CORRESPONDANCE, DE
LA CLASSE DE LA DEVELOPPÉE ET DE LA CAUSTIQUE PAR
RÉFLEXION D'UNE COURBE GÉOMÉTRIQUE D'ORDRE m ET
DE LA CLASSE n ;**

PAR M. CHASLES.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXXII.)

On reconnaît immédiatement, soit par l'analyse, soit par une considération géométrique fort simple, que le nombre des normales qu'on peut mener par un point à une courbe géométrique d'ordre m , ne possédant aucun point multiple ou de rebroussement, est m^2 . Cela résulte, analytiquement, de ce que les coordonnées des pieds des normales sont les racines de deux équations de degré m : et, en géométrie, de ce que les pieds des normales sont les points d'intersection de la courbe proposée et d'une seconde courbe infiniment voisine qui représente la position que prendrait la courbe elle-même, par une rotation infiniment petite autour du point d'où partent les normales.

Mais chacun de ces deux raisonnements ne s'applique qu'à une courbe pure de tous points multiples, et n'indique rien sur l'influence que doivent avoir de tels points.

Et dans le cas général d'une courbe quelconque, on ne résout la question que pour une position particulière du point d'où émanent les normales, savoir, quand ce point est à l'infini, auquel cas les normales sont parallèles entre elles, dans une direction donnée. Leur nombre alors est évidemment le même que celui des tangentes parallèles, lequel est n , comme quand les tangentes émanent

d'un point quelconque; mais il faut y ajouter les normales qui se trouvent à l'infini, comme émanant aussi du point donné à l'infini. Celles-ci sont les normales aux m points de la courbe situés eux-mêmes à l'infini. Le nombre total des normales émanées d'un point situé à l'infini est donc $m + n$.

Cette solution d'une question fondamentale de la théorie des courbes, indépendamment de ce qu'elle laisse à désirer un raisonnement général, donne lieu, dans deux cas différents, à des objections ou difficultés que l'on n'a peut-être pas remarquées.

Premièrement : lorsque la courbe proposée passe par les deux points imaginaires à l'infini, appartenant à un cercle, qui sont les points de contact des asymptotes du cercle, appelés *points circulaires*, points que nous considérerons ici comme les points doubles de l'involution formée sur la droite de l'infini par les couples de points appartenant aux deux côtés d'un angle droit tournant autour de son sommet, et que nous désignerons par les lettres e et f ; lors, dis-je, que la courbe proposée U_n^n passe par ces deux points, on sait que la normale en un de ces points coïncide avec la tangente. Dès lors on ne la regarde plus comme coïncidante avec la droite de l'infini, et l'on dit que la courbe n'a plus que $m - 2$ normales à l'infini, qui, avec les n normales parallèles, réduisent à $(m + n - 2)$ le nombre des normales émanées d'un point. C'est ainsi que pour le cercle le nombre des normales est 2 et non 4, comme il résulterait de la formule générale $m + n$.

Mais s'il est permis de dire qu'au point e la normale coïncide avec la tangente, on n'est pas fondé à ne pas admettre la droite de l'infini comme une normale au même point e . Car toute droite passant par ce point est une normale, puisque deux droites rectangulaires, de quelque

point qu'elles partent, sont caractérisées par cette condition de diviser le segment ef en deux points conjugués harmoniques. Si l'un des deux points coïncide avec e , l'autre coïncide nécessairement avec le même point e . Dès lors deux droites quelconques menées par e sont rectangulaires, et, en particulier, toute droite passant par ce point, y compris la droite ef elle-même, est normale à la courbe.

C'est cette propriété, que toute droite passant par le point e y est normale à la courbe, qui fait que l'on doit négliger, dans le nombre total des normales menées d'un point, cette droite; ce qui réduit le nombre $m + n$ à $m + n - 2$, à raison des deux points e et f .

Secondement : lorsque la courbe U^n a pour tangente la droite située à l'infini, le nombre des tangentes parallèles est diminué d'une unité, et par suite aussi celui des normales parallèles; et l'on en conclut que le nombre des normales menées par un point situé à l'infini, et conséquemment par un point quelconque, est alors $m + n - 1$. Mais il semble qu'on compte alors la tangente à l'infini comme une normale *double*, pour faire le nombre m des normales à l'infini. Il y a donc là une vraie difficulté : mais on peut l'éviter par cette considération rigoureuse, que toute droite menée au point de contact de la courbe et de la droite ef est normale à la courbe, de même que toute droite menée à l'un des points circulaires, quand la courbe passe par ces points; de sorte qu'on doit en faire abstraction dans le nombre des normales menées d'un point donné.

Le principe de correspondance, dont j'ai déjà eu à faire de nombreuses applications dans la théorie des systèmes de coniques et de courbes d'ordre quelconque (*), s'ap-

(*) *Comptes rendus*, t. LVIII, p. 1175; 1864.

plique à la question actuelle, considérée dans toute sa généralité, avec une facilité extrême, et même de deux manières différentes, et donne la solution immédiate, sans aucune ambiguïté, des deux cas particuliers dont il vient d'être question.

Ce principe s'applique de même à cette autre détermination qui fait suite naturellement à la théorie des normales, celle du nombre des rayons émanés d'un point et qui, après leur réflexion sur une courbe géométrique U_m^n , vont concourir en un point donné.

THÉORÈME. — *Le nombre des normales menées d'un point P à une courbe U_m^n , d'ordre m et de classe n , est $(m + n)$.*

En effet, une droite PX rencontre la courbe en m points; m droites PU, perpendiculaires aux tangentes en ces points, correspondent à PX. Une droite PU de direction arbitraire est perpendiculaire à n tangentes; par les points de contact de ces tangentes passent n droites PX qui correspondent à PU. Il existe donc $(m + n)$ droites PX coïncidant chacune avec la droite correspondante PU; ces droites sont les normales demandées. Ainsi le théorème est démontré.

Cas particuliers. — I. Lorsque la courbe U_m^n passe par les deux points circulaires à l'infini e, f , si l'on mène la droite PX par le point e , la tangente en ce point lui est perpendiculaire, de sorte que PU coïncide avec PX, ce qui forme une solution étrangère; et de même à l'égard du point f . Le nombre $m + n$ des solutions est donc réduit à $m + n - 2$.

Et en général, lorsque la courbe U_m^n a un point multiple d'ordre r en chacun des deux points circulaires à l'infini, le nombre des normales qu'on peut lui mener d'un point donné est réduit à $m + n - 2r$.

II. Supposons maintenant que la courbe U_m^n soit tangente à la droite ef de l'infini en un point a ; toute droite menée par ce point est normale à la courbe, parce que la tangente passe par le point a' conjugué harmonique de a par rapport au segment ef ; donc, si la droite PX passe par le point de contact a , la droite PU passe aussi par ce point ; ce qui fait une solution étrangère, et réduit ainsi le nombre des normales à $m + n - 1$.

III. Enfin, si la courbe U_m^n a un point multiple d'ordre s , le nombre des normales menées par ce point, y compris les normales en ce point même, est, comme dans le cas général, $m + n$, parce que la démonstration générale subsiste sans aucune modification.

2^e *Démonstration.* — Cette démonstration sera une conséquence immédiate du théorème suivant :

THÉOREME. — *Si, autour d'un point O, on fait tourner un angle droit AOB, et qu'aux points où le côté OA coupe une courbe U_m^n on mène les tangentes, lesquelles rencontreront le côté OB en m points, le lieu de ces points est une courbe de l'ordre $(m + n)$, ayant un point multiple d'ordre n en O.*

Prouvons que la courbe a $m + n$ points sur une droite quelconque L. Par un point x de cette droite passe le côté OB de l'angle ; le côté OA rencontre la courbe en m points, et les tangentes en ces points coupent L en m points u . Par un point u passent n tangentes ; si le côté OA de l'angle passe successivement par les n points de contact, le côté OB coupe L en n points x . Il existe donc $m + n$ points x qui coïncident chacun avec un point u correspondant. Ces points appartiennent à la courbe cherchée, qui est donc d'ordre $(m + n)$. c. q. f. d.

Conséquence. — Cette courbe d'ordre $(m + n)$ a $m + n$ points à l'infini ; alors le côté OB de l'angle droit

est parallèle à la tangente en l'un des points du côté OA, et, par conséquent, ce côté OA est la normale en ce point. Donc il existe $(m + n)$ normales émanées du point O; ce que nous nous proposons de démontrer.

Observation. — Les deux démonstrations que nous venons de donner de la formule $m + n$, qui exprime le nombre des normales qu'on peut mener par un point, s'appliquent d'elles-mêmes au cas des obliques abaissées d'un point sous un angle de grandeur donnée et dans un même sens de rotation, dont le nombre est aussi $m + n$. Il suffit de considérer, dans la première démonstration, l'oblique et la tangente en son pied comme deux droites qui divisent le segment ef de l'infini dans un rapport *anharmonique* donné, au lieu du rapport harmonique.

Passons au théorème relatif à la réflexion sur une courbe U_m^n , dont voici l'énoncé :

Lorsque des rayons émanés d'un point Q se réfléchissent sur une courbe U_m^n , les rayons réfléchis enveloppent une courbe de la classe $m + 2n$.

Il faut prouver qu'il existe, sur la courbe U_m^n , $m + 2n$ points tels, que les rayons réfléchis en ces points passeront par un même point Q' . Ces rayons, et les rayons incidents émanés du point Q font des angles égaux avec la tangente, et sont par conséquent conjugués harmoniques par rapport à la tangente et à la normale; on peut dire réciproquement que la tangente et la normale coupent la droite QQ' en deux points x , x' conjugués harmoniques par rapport aux deux points Q, Q' . Cela posé, par un point x de la droite QQ' passent n tangentes $x\theta$ de la courbe U_m^n ; les normales aux points de contact θ coupent QQ' en n points x'' . Un point x'' , pris arbitrairement sur QQ' , a pour conjugué par rapport au segment QQ' un point x' par lequel passent $m + n$ nor-

normales de U_m^n ; les tangentes aux pieds de ces normales coupent QQ' en $m + n$ points x . Donc il existe $m + 2n$ points x qui coïncident chacun avec un point x correspondant. Ces $m + 2n$ points appartiennent aux tangentes de $m + 2n$ points de la courbe qui satisfont à la question. Le théorème est donc démontré.

Observation. — Ce résultat se vérifie immédiatement par cette considération que la courbe enveloppe des rayons réfléchis a $m + 2n$ tangentes passant par le point Q . Ces tangentes sont : 1° les $m + n$ normales menées par Q , qui, regardées comme rayons incidents, se réfléchissent dans leur propre direction ; 2° les n tangentes menées du point Q , qui, regardées comme rayons incidents, font un angle nul avec les tangentes, et donnent lieu à des rayons réfléchis faisant aussi un angle nul avec ces tangentes, et passant par le point Q .

Cas particulier. — Si la courbe U_m^n passe par les deux points circulaires à l'infini e, f , il y a deux solutions étrangères dans le nombre $m + 2n$ qui exprime la classe de la caustique, et qui devient donc $m + 2n - 2$. En effet, la normale au point e est indéterminée de direction, comme nous l'avons dit dans le problème des normales, de sorte que le rayon réfléchi est aussi indéterminé de direction, et passe donc par tel point Q' qu'on voudra, ce qui constitue une solution étrangère ; de même pour le point f .

Ainsi, pour le cercle, la caustique est de la quatrième classe. Effectivement, on sait qu'alors sa développante appelée *caustique secondaire* est l'ovale de Descartes ayant un point double au point rayonnant avec les deux points de rebroussement aux points circulaires de l'infini. La développée de cette courbe, c'est-à-dire la caustique proprement dite, est donc [suivant la formule $m(m - 1) - 2d - 3d'$ qui exprime la classe d'une

courbe d'ordre m douée de d points doubles et de d' points de rebroussement] de la classe $4.3 - 2 - 6 - 4$.

C'est surtout dans la théorie des systèmes de courbes représentés par les deux caractéristiques μ, ν que le principe de correspondance est d'un usage précieux, et nous pouvons dire indispensable. Mais il est une foule de questions et de théorèmes relatifs à une simple courbe, dans lesquels il procure la même facilité que dans les démonstrations qui font le sujet de cette Note. On avait pu en juger déjà par les exemples que j'en avais donnés en présentant ce principe, d'abord dans des limites restreintes, sous le titre de *Principe de correspondance entre deux objets variables, qui peut être d'un grand usage en Géométrie* (*). J'aurai à revenir sur ce sujet.
