

Solutions des questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 10
(1871), p. 92-96

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1871_2_10__92_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1871, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**SOLUTIONS DES QUESTIONS PROPOSÉES
DANS LES NOUVELLES ANNALES.**

Question 876

(voir 2^e série, t VII, p. 239);

PAR M. LAYRITZ,

Élève du lycée de Nancy.

1020 étant le dénominateur d'une fraction irréductible, pourquoi le nombre des chiffres de la période engendrée par cette fraction sera-t-il l'un des nombres 1, 2, 4, 8, 16, 32?

Le nombre n des chiffres de la période engendrée par une fraction irréductible égale l'exposant de la plus petite puissance de 10 qui, divisée par le produit des facteurs du dénominateur autres que 2 et 5, donne pour reste 1.

On sait, de plus (théorème d'Euler), que, p désignant le nombre des entiers inférieurs à d et premiers avec lui, $10^p - 1$ est divisible par d . On conclut de là que n est un diviseur de p , car toute puissance de 10 dont l'exposant est un multiple de n donne pour reste 1 lorsqu'on la divise par d , ce qui n'arrive jamais aux puissances de 10 dont l'exposant n'est pas un multiple de n .

Dans l'exemple actuel, 1020 étant égal à 20×51 , on a

$$d = 51 = 17 \times 3.$$

Les nombres premiers avec 51 et inférieurs à lui sont tous les nombres entiers inférieurs à 51, moins les multiples de 17 et les multiples de 3; donc

$$p = 50 - 16 - 2 = 2^5.$$

n , étant un diviseur de p , ne peut donc être que l'un des nombres 1, 2, 2^2 , 2^3 , 2^4 , 2^5 , c'est-à-dire 1, 2, 4, 8, 16, 32.

Note. — M. Toubin, de Lons-le-Saulnier, nous a envoyé un travail sur la même question.

Questions 877, 878 et 879

(voir 2^e série, t. VII, p. 239);

PAR M. E. PELLET,

Élève du lycée de Nîmes.

877. Le nombre des chiffres de la période à laquelle conduit la fraction $\frac{a}{b}$ irréductible est égal au plus petit nombre n tel que $10^n - 1$ soit divisible par β , β étant égal à b débarrassé des facteurs 2 et 5 qu'il contient.

Pour que $10^{n'} - 1$ soit divisible par b , il faut que n' soit multiple de n . Soit, en effet,

$$n' = nq + r,$$

r étant positif et plus petit que n ; on a

$$10^{n'} - 1 = (10^{nq} - 1)10^r + 10^r - 1.$$

$10^{nq} - 1$ est divisible par $10^n - 1$, et par suite par b ; pour que $10^{n'} - 1$ soit divisible par b , il faut donc que $10^r - 1$ le soit, ce qui exige que $r = 0$. De là il résulte que, si le dénominateur d'une fraction irréductible est un multiple de b , cette fraction, réduite en décimales, donnera lieu à une période dont le nombre des chiffres égale un multiple de n . Car, si l'on désigne par n' ce nombre de chiffres, $10^{n'} - 1$ doit être divisible par b .

878. Lorsque la conversion de plusieurs fractions irréductibles $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$, $\frac{a''}{b''}$, ... en décimales conduit à des

périodes dont n, n', n'', \dots sont les nombres de chiffres, toute fraction irréductible dont le dénominateur est égal au plus petit commun multiple des dénominateurs b, b', b'', \dots donne lieu à une période d'un nombre de chiffres égal au plus petit commun multiple M des nombres n, n', n'', \dots .

En effet, $10^M - 1$ est divisible séparément par b, b', b'', \dots , et par suite par le plus petit multiple commun de ces nombres. En outre, tout nombre M' , tel que $10^{M'} - 1$ soit divisible par le plus petit multiple commun de b, b', b'', \dots , doit être divisible par n, n', n'', \dots , et par suite par M .

879. *Lorsque la conversion en décimales d'une fraction irréductible dont le dénominateur est un nombre premier p conduit à une période de n chiffres, et que p^α est la plus grande puissance de p qui divise $10^n - 1$, toute fraction irréductible ayant pour dénominateur $p^{\alpha+\beta}$ conduit à une période de np^β chiffres.*

Pour que $10^{n'} - 1$ soit divisible par $p^{\alpha+1}$, il faut, d'après ce qui précède, que n' soit un multiple de n . Posons $n' = nq$, on a

$$10^{nq} - 1$$

$$= (10^n - 1) [10^{n(q-1)} - 1 + 10^{n(q-2)} - 1 + \dots + 10^n - 1 + q].$$

$10^n - 1$ n'étant divisible que par p^α , pour que $10^{nq} - 1$ soit divisible par $p^{\alpha+1}$, il faut et il suffit que la quantité entre crochets soit divisible par p . Mais la somme

$$10^{n(q-1)} - 1 + 10^{n(q-2)} - 1 + \dots + 10^n - 1$$

est divisible par p , il faut donc que q le soit aussi; q est donc au moins égal à p , $n' = np$ est donc le plus petit nombre tel que $10^{n'} - 1$ soit divisible par $p^{\alpha+1}$.

En raisonnant comme précédemment, on voit que $n' = np^2$ est le plus petit nombre tel que $10^{n'} - 1$ soit divisible par $p^{\alpha+2}$, et en général $n' = np^{\beta}$ le plus petit nombre tel que $10^{n'} - 1$ soit divisible par $p^{\alpha+\beta}$.

np^{β} est donc le nombre des chiffres de la période à laquelle donne lieu toute fraction irréductible de dénominateur $p^{\alpha+\beta}$.

Note. — Les trois questions précédentes ont été résolues aussi par M. Layritz, élève du lycée de Nancy.

Question 942

(voir 2^e série, t. VIII, p. 275);

PAR M. A. MOREL,

Répétiteur à Sainte-Barbe.

Un cube parfait, augmenté de sept unités d'un ordre quelconque, ne peut pas être un carré parfait.

(JOFFROY.)

Nous croyons que l'énoncé de cette question peut être remplacé par le suivant :

Un cube parfait, augmenté de sept unités d'ordres quelconques, ne peut pas être un carré parfait.

Nous suivons en cela la modification proposée par M. Laisant dans l'énoncé de la question 902, résolue au tome VIII, p. 315.

En effet, le théorème précédent revient à prouver l'impossibilité de l'égalité suivante :

$$10^n + 10^{n'} + 10^{n''} + 10^{n'''} + 10^{n^{IV}} + 10^{n^V} + 10^{n^{VI}} = a^2 - b^3.$$

Or

a^2 est de l'une des formes $m9, m9 + 1,$

b^3 est de l'une des formes $m9, m9 + 1, m9 - 1;$

donc

$a^2 - b^3$ est de l'une des formes $m9$, $m9 \pm 1$, $m9 + 2$.

Mais le premier membre de l'égalité précédente est égal à un multiple de 9 augmenté de 7 unités, ou de la forme $m9 - 2$; donc il ne peut jamais être égal au second membre.

C. Q. F. D.