FITREMANN

Remarques sur les racines carrées et cubiques

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 10 (1871), p. 87-89

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1871_2_10__87_1>

REMARQUES SUR LES RACINES CARRÉES ET CUBIQUES;

PAR M. FITREMANN,
Professeur à Sainte-Barbe.

Je trouve dans l'*Arithmétique* de M. Serret, 1re édition, p. 209 et 225, les énoncés suivants :

1° *Quand on a déterminé un ou plusieurs chiffres de la racine carrée d'un entier, et qu'on se propose de trouver le chiffre suivant, on effectue une division dont le quotient est le chiffre cherché ou un chiffre trop fort. On propose de démontrer que, si le nombre formé par les chiffres déjà trouvés à la racine est égal ou supérieur à* 5, *le quotient en question, s'il est plus grand que le chiffre cherché, ne peut le surpasser que d'une unité.*

2° *Énoncé analogue pour la racine cubique, le nombre déjà obtenu à la racine devant être au moins égal à* 10.

Dans les deux cas, cette limite inférieure du nombre qui doit déjà être obtenu à la racine pour que le théorème soit vrai peut être notablement abaissée.

1° Soit w le nombre, a le nombre déjà obtenu à la racine; soit $w - a'^2 \times 100 = R$; posons $R = R' \times 10 + R''$, $R'' < 10$, on divise R' par $2a$; soit b le quotient; on a donc $R' \geqq 2ab$, $R' \times 10 \geqq 2ab \times 10$; par hypothèse, b est trop fort; donc $R < 2a \times 10 \times b + b^2$; mais, comme $R' \times 10$, et *à fortiori* R, contient $2ab \times 10$, l'excès de

$2a \times 10 \times b + b^2$ sur R ne surpasse pas b^2 au maximum. Si donc, en essayant $b - 1$, on diminue d'une quantité au moins égale à b^2 le nombre que l'on aura à retrancher de R, la soustraction deviendra certainement possible. Or, pour essayer $b - 1$, on est conduit à essayer de retrancher de R le nombre $2a \times 10(b-1) + (b-1)^2$, nombre qui est inférieur à $2a \times 10 \times b + b^2$ de $2a \times 10 + 2b - 1$; donc le chiffre $b - 1$ sera le chiffre cherché si, entre a et b, on a la relation

$$2a \times 10 + 2b - 1 \geqq b^2, \quad \text{ou} \quad 2a \times 10 \geqq (b-1)^2.$$

Or, si

$a = 1$, la condition est remplie tant que b ne surpasse pas 5,
$a = 2$, » » 7,
$a = 3$, » » 8,
$a = 4$, quel que soit b,

résultat qu'il serait facile d'énoncer en langue vulgaire; et, en admettant que l'on trouvât l'énoncé un peu long pour prendre place dans un cours, tout au moins devrait-on, dans celui de M. Serret, remplacer 5 par 4.

2° Soient $w - (a \times 10)^3 = R$, $R = R' \times 100 + R''$; je divise R' par $3a^2$; si b est le quotient, on aura $R' \geqq 3a^2 b$ et $R' \times 100 \geqq 3a^2 b \times 100$. Par hypothèse, $R' \times 100 + R'' < 3a^2 b \times 100 + 3ab^2 \times 10 + b^3$. Mais évidemment l'excès du second nombre sur le premier ne surpasse pas $3ab^2 \times 10 + b^3$.

Or, en essayant $b - 1$ au lieu de b, il est facile de voir qu'on diminue le nombre à retrancher de R de la quan-

$$3a^2 \times 100 + 6a \times 10 \times b - 3a \times 10 + 3b^2 - 3b + 1;$$

donc $b - 1$ sera le chiffre cherché, si l'on a

$$3a^2 \times 100 + 6a \times 10 \times b - 3a \times 10 \\ + 3b^2 - 3b + 1 \geqq 3ab^2 \times 10 + b^3,$$

ce qui peut s'écrire

$$3a^2 \times 100 > (b-1)^2(3a \times 10 + b - 1).$$

On reconnaît bien facilement que la condition est remplie si l'on a

$a = 1$ avec $b = 4$ et au-dessus,
$a = 2$ » $b = 5$ »
$a = 3$ » $b = 6$ »
$a = 4$ » $b = 7$ »
$a = 5$ » $b = 7$ »
$a = 6$ » $b = 8$ »
$a = 7$, quel que soit b.

On pourrait donc, tout au moins, remplacer, dans l'énoncé de M. Serret, 10 par 7.

Autre remarque. — Je me bornerai à énoncer les deux remarques suivantes, dont la démonstration est immédiate.

Si deux nombres entiers ont le même nombre de chiffres, ce nombre de chiffres étant pair, et qu'ils aient plus de la moitié de leurs chiffres à gauche communs, la différence de leurs racines carrées sera inférieure à 0,1 si le nombre formé par leurs deux premiers chiffres à gauche est au moins égal à 25.

Si deux nombres entiers ont le même nombre de chiffres, ce nombre de chiffres étant un multiple de 3, et qu'ils aient plus du tiers de leurs chiffres à gauche communs, la différence de leurs racines cubiques sera inférieure à 0,1 si le nombre formé par leurs trois premiers chiffres à gauche est égal ou supérieur à 193.