ÉDOUARD AMIGUES

Note sur les sommes des puissances semblables des n premiers nombres entiers

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 10 (1871), p. 79-82

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1871_2_10__79_1>

NOTE SUR LES SOMMES DES PUISSANCES SEMBLABLES DES n PREMIERS NOMBRES ENTIERS;

PAR M. ÉDOUARD AMIGUES,
Professeur au lycée de Toulouse.

1. Dans le numéro du mois de février 1870, M. Édouard Lucas a indiqué un procédé tout à fait élémentaire pour trouver le carré de l'une de ces sommes en fonction des premières puissances de quelques autres. La marche à suivre consiste à disposer des nombres en carré d'une manière convenable, à faire la somme de ces nombres de deux manières différentes, et à égaler les résultats. Il est facile de voir que l'on peut de même trouver les troisièmes puissances de ces sommes en disposant convenablement des nombres en cube.

Nous désignerons par S_1 la somme des n premiers nombres entiers, par S_2 la somme de leurs carrés, par S_3 la somme de leurs cubes, etc.

Soit à trouver la troisième puissance de S_1.

On écrira sur une même ligne les n premiers nombres, puis au-dessous les nombres doubles, puis au-dessous les nombres triples, etc., jusqu'à ce qu'on ait un carré. On obtiendra ainsi une table de Pythagore qui sera la tranche inférieure de notre cube. Au-dessus de cette tranche, on en formera une autre en doublant les nombres de la tranche inférieure, puis encore une autre en triplant, etc., jusqu'à ce qu'on ait un cube.

La somme des nombres de la tranche inférieure est évidemment S_1^2, et la somme des nombres est par conséquent S_1^3.

Évaluons cette somme d'une autre manière. A l'un des sommets du cube se trouve le nombre n^3. Considérons les trois faces du cube qui se coupent en ce point, et cherchons la somme des nombres qu'elles contiennent. En faisant abstraction des trois arêtes qui se coupent en n^3, nous avons trois carrés identiques dont chacun contient

$$n\left[\frac{n(n-1)}{2}\right]^2 \text{ unités.}$$

D'autre part, chacune des trois arêtes négligées contient, abstraction faite du sommet n^3, un nombre d'unités égal à

$$n^2\frac{n(n-1)}{2}.$$

Il faut enfin tenir compte du sommet n^3; nous avons donc en tout, pour ces trois faces,

$$3n\left[\frac{n(n-1)}{2}\right]^2 + 3n^2\frac{n(n-1)}{2} + n^3 = \tfrac{3}{4}n^5 + \tfrac{1}{4}n^3.$$

Opérons sur le cube réduit qui reste, comme sur le précédent, et en continuant ainsi, nous trouvons, pour la somme des nombres disposés en cube,

$$\tfrac{3}{4}S_5 + \tfrac{1}{4}S_3,$$

donc nous avons l'identité

$$S_1^3 = \tfrac{3}{4}S_5 + \tfrac{1}{4}S_3.$$

Pour avoir S_2^3, il faudra écrire sur une même ligne les carrés des n premiers nombres, puis former les autres lignes en multipliant les nombres de la première successivement par

$$2^2,\quad 3^2,\quad 4^2,\quad \text{etc.}$$

Quant aux autres tranches, on les formera aussi en multipliant les nombres de la tranche inférieure successivement par 2^2, 3^2, 4^2, etc. Le nombre des unités de ce cube sera évidemment S_2^3.

On opérera de même pour S_3^3. Il est visible que la méthode est générale. Elle pourra même s'appliquer à de tout autres sommes que celles des puissances semblables des n premiers nombres entiers.

2. Le même procédé permet de trouver aisément S_2. Imaginons un cube formé exclusivement avec des unités, et supposons que l'arête en contienne $n+1$. Le nombre des unités de ce cube est $(n+1)^3$.

D'autre part, si nous considérons un sommet et les trois faces qui s'y coupent, nous voyons, comme dans le cas précédent, que le nombre des unités contenues dans ces trois faces est

$$3n^2 + 3n + 1.$$

En opérant de même sur les cubes réduits jusqu'à la fin, nous arrivons à cette conclusion, que le nombre des unités disposées en cube est

$$3S_2 + 3S_1 + (n + 1);$$

donc

$$(n + 1)^3 = 3S_2 + 3S_1 + (n + 1).$$

Pour avoir S_1, considérons le carré qui sert de base à ce cube. Il contient $(n + 1)^2$ unités; mais il est facile de voir que deux côtés consécutifs contiennent $2n + 1$ unités. En opérant de même sur le carré réduit jusqu'à la fin, on trouve, pour la somme totale des unités,

$$(n + 1)^2 = 2S_1 + (n + 1).$$

De ces deux identités, on conclut

$$S_1 = \frac{n(n + 1)}{2},$$

$$S_2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}.$$

3. En disposant des unités simples en prisme triangulaire droit et équilatéral, on trouvera

$$S_1^2 = S_3.$$

Mais le lecteur reconnaîtra aisément que ce dernier procédé ne diffère pas au fond de celui qu'indique M. Lucas, et que même il lui est inférieur pour plusieurs motifs que l'on aperçoit sans peine.