

WILLIAM WALTON

**Démonstration du théorème de Cauchy  
: toute équation à une racine**

*Nouvelles annales de mathématiques 2<sup>e</sup> série*, tome 10  
(1871), p. 509-514

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1871\\_2\\_10\\_\\_509\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1871_2_10__509_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1871, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE CAUCHY :  
TOUTE ÉQUATION A UNE RACINE ;**

PAR M. WILLIAM WALTON.

( Traduit de l'anglais de *The Quarterly Journal of pure and applied Mathematics.* )

Repésentons par  $f(x)$  le polynôme de la théorie des équations, et supposons que les coefficients des diverses puissances de  $x$  soient des quantités réelles. Remplaçons  $x$  par  $u + \nu\sqrt{-1}$ ,  $u$  et  $\nu$  étant réels, et posons

$$f(u + \nu\sqrt{-1}) = P + Q\sqrt{-1};$$

$P$  et  $Q$  sont des quantités réelles.

Différentions cette équation  $\lambda + \mu$  fois par rapport à  $u$ , et désignons la dérivée d'ordre  $(\lambda + \mu)$  de  $f(x)$  par  $f_{\lambda+\mu}(x)$ ; nous aurons

$$f_{\lambda+\mu}(u + \nu\sqrt{-1}) = \frac{d^{\lambda+\mu}P}{du^{\lambda+\mu}} + \sqrt{-1} \frac{d^{\lambda+\mu}Q}{du^{\lambda+\mu}}.$$

Différentions maintenant  $\lambda$  fois par rapport à  $u$ ,  $\mu$  fois par rapport à  $\nu$ , nous aurons

$$(-1)^{\frac{1}{2}\mu} f_{\lambda+\mu}(u + \nu\sqrt{-1}) = \frac{d^{\lambda+\mu}P}{du^{\lambda} d\nu^{\mu}} + \sqrt{-1} \frac{d^{\lambda+\mu}Q}{du^{\lambda} d\nu^{\mu}}.$$

Ces deux résultats nous montrent que l'on a

$$(-1)^{\frac{1}{2}\mu} \left( \frac{d^{\lambda+\mu}P}{du^{\lambda+\mu}} + \sqrt{-1} \frac{d^{\lambda+\mu}Q}{du^{\lambda+\mu}} \right) = \frac{d^{\lambda+\mu}P}{du^{\lambda} d\nu^{\mu}} + \sqrt{-1} \frac{d^{\lambda+\mu}Q}{du^{\lambda} d\nu^{\mu}}.$$

De cette relation, on déduit les deux systèmes

$$(1) \quad \mu \text{ pair} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^{\lambda+\mu} P}{du^\lambda dv^\mu} = (-1)^{\frac{1}{2}\mu} \frac{d^{\lambda+\mu} P}{du^{\lambda+\mu}}, \\ \frac{d^{\lambda+\mu} Q}{du^\lambda dv^\mu} = (-1)^{\frac{1}{2}\mu} \frac{d^{\lambda+\mu} Q}{du^{\lambda+\mu}}; \end{array} \right.$$

$$(2) \quad \mu \text{ impair} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^{\lambda+\mu} P}{du^\lambda dv^\mu} = (-1)^{\frac{1}{2}(\mu+1)} \frac{d^{\lambda+\mu} Q}{du^{\lambda+\mu}}, \\ \frac{d^{\lambda+\mu} Q}{du^\lambda dv^\mu} = (-1)^{\frac{1}{2}(\mu-1)} \frac{d^{\lambda+\mu} P}{du^{\lambda+\mu}}. \end{array} \right.$$

Désignons par  $F$  la quantité  $P^2 + Q^2$ , et nous allons déterminer la nature du minimum de  $F$ , qui existe certainement. Écrivons  $u + h, v + k$  à la place de  $u$  et  $v$ , et appelons  $F'$  la valeur correspondante de  $F$ , alors

$$F' - F = \left( h \frac{d}{du} + k \frac{d}{dv} \right) (P^2 + Q^2) \\ + \frac{1}{1.2} \left( h \frac{d}{du} + k \frac{d}{dv} \right)^2 (P^2 + Q^2) + \dots$$

Cette expression montre que l'existence d'un minimum pour  $F$  exige que l'on ait

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} P \frac{dP}{du} + Q \frac{dQ}{du} = 0, \\ P \frac{dP}{dv} + Q \frac{dQ}{dv} = 0. \end{array} \right.$$

Mais, en faisant dans (2)  $\lambda = 0, \mu = 1$ , on voit que  $\frac{dP}{dv} = -\frac{dQ}{du}, \frac{dQ}{dv} = \frac{dP}{du}$ ; donc, par suite de (3), on doit avoir simultanément

$$F \frac{dP}{du} = 0, \quad F \frac{dP}{dv} = 0, \quad F \frac{dQ}{du} = 0, \quad F \frac{dQ}{dv} = 0.$$

Par suite, on devra avoir simultanément ou bien

$$P = 0, \quad Q = 0,$$

ou bien

$$\frac{dP}{du} = 0, \quad \frac{dP}{dv} = 0, \quad \frac{dQ}{du} = 0, \quad \frac{dQ}{dv} = 0.$$

Supposons d'abord que P et Q ne soient pas tous deux nuls, et choisissons la seconde hypothèse; et supposons, en outre, que, dans le développement par rapport aux puissances de  $h$  et  $k$ , de la valeur de  $F' - F$ , le premier ordre des coefficients différentiels partiels de P et Q, dont quelques-uns au moins ne sont pas nuls, soit  $2r$ . Il est inutile de considérer l'hypothèse où cet ordre de coefficients serait impair, puisque, dans cette circonstance, on n'aurait pas un minimum pour F.

On a donc

$$(4) \quad 1 \cdot 2 \dots 2r (F' - F) = \left( h \frac{d}{du} + k \frac{d}{dv} \right)^{2r} (P^2 + Q^2) + \dots$$

Maintenant, à l'aide du théorème de Leibnitz, on a

$$\begin{aligned} \frac{d^{2r} P^2}{du^{2r-\nu} dv^\nu} &= \frac{d^{2r-\nu}}{du^{2r-\nu}} \left( P \frac{d^\nu P}{dv^\nu} + \frac{\nu}{1} \frac{dP}{dv} \frac{d^{\nu-1} P}{dv^{\nu-1}} + \dots + P \frac{d^\nu P}{dv^\nu} \right) \\ &- 2P \frac{d^{2r} P}{du^{2r-\nu} dv^\nu} + \text{des multiples des coefficients dif-} \\ &\text{férentiels de P d'ordre inférieur, lesquels sont} \\ &\text{tous nuls.} \end{aligned}$$

Donc on a

$$(5) \quad \frac{d^{2r} P^2}{du^{2r-\nu} dv^\nu} = 2P (-1)^{\frac{1}{2}\nu} \frac{d^{2r} P}{du^{2r}}, \quad \text{pour } \nu \text{ pair,}$$

ou

$$(6) \quad \frac{d^{2r} P^2}{du^{2r-\nu} dv^\nu} = 2P (-1)^{\frac{1}{2}(\nu+1)} \frac{d^{2r} Q}{du^{2r}}, \quad \text{pour } \nu \text{ impair.}$$

En employant le même procédé, on trouve

$$\frac{d^{2r} Q^2}{du^{2r-\nu} dv^\nu} = 2Q \frac{d^{2r} Q}{du^{2r-\nu} dv^\nu},$$

c'est-à-dire

$$(7) \quad \frac{d^{2r} Q^2}{du^{2r-\nu} dv^\nu} = 2Q (-1)^{\frac{1}{2}\nu} \frac{d^{2r} Q}{du^{2r}} \quad \text{pour } \nu \text{ pair,}$$

ou

$$(8) \quad \frac{d^{2r} Q^2}{du^{2r-\nu} dv^\nu} = 2Q (-1)^{\frac{1}{2}(\nu-1)} \frac{d^{2r} P}{du^{2r}} \quad \text{pour } \nu \text{ impair.}$$

Par suite de ces relations, l'équation (4) devient,  $c$ , indiquant le nombre de combinaisons de  $2r$  objets  $\nu$  à  $\nu$ ,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} 1 \cdot 2 \dots 2r (F' - F) \\ &= P \left[ h^{2r} \frac{d^{2r} P}{du^{2r}} - c_1 h^{2r-1} k \frac{d^{2r} Q}{du^{2r}} - \dots \right. \\ & \quad \left. + (-1)^r c_1 h k^{2r-1} \frac{d^{2r} Q}{du^{2r}} + (-1)^r k^{2r} \frac{d^{2r} P}{du^{2r}} \right] \\ & \quad + Q \left[ h^{2r} \frac{d^{2r} Q}{du^{2r}} + c_1 h^{2r-1} k \frac{d^{2r} P}{du^{2r}} - \dots \right. \\ & \quad \left. + (-1)^{r-1} c_1 h k^{2r-1} \frac{d^{2r} P}{du^{2r}} + (-1)^r k^{2r} \frac{d^{2r} Q}{du^{2r}} \right], \end{aligned}$$

et par suite

$$\begin{aligned} & 1 \cdot 2 \dots 2r (F' - F) \\ &= \left( P \frac{d^{2r} P}{du^{2r}} + Q \frac{d^{2r} Q}{du^{2r}} \right) [(h + k \sqrt{-1})^{2r} + (h - k \sqrt{-1})^{2r}] \\ & \quad + \frac{1}{\sqrt{-1}} \left( Q \frac{d^{2r} P}{du^{2r}} - P \frac{d^{2r} Q}{du^{2r}} \right) [(h + k \sqrt{-1})^{2r} - (h - k \sqrt{-1})^{2r}] + \dots \end{aligned}$$

Posant

$$h = \rho \cos \theta, \quad k = \rho \sin \theta,$$

$$P \frac{d^{2r} P}{du^{2r}} + Q \frac{d^{2r} P}{du^{2r}} = c \sin \alpha, \quad Q \frac{d^{2r} P}{du^{2r}} - P \frac{d^{2r} Q}{du^{2r}} = c \cos \alpha,$$

on a

$$\frac{1}{2} 1.2 \dots 2r (F' - F) = c\rho^{2r} \sin(\alpha + 2r\theta) + \text{des termes en } \rho \\ \text{d'un degré supérieur à } 2r.$$

Mais, en choisissant convenablement la valeur de la quantité arbitraire  $\theta$ , on peut donner une valeur négative au terme  $c\rho^{2r} \sin(\alpha + 2r\theta)$ ; donc on n'aura pas de valeur minima pour  $F$  dans cette hypothèse, et, par suite, puisque l'existence de ce minimum est évidente,  $P$  et  $Q$  sont capables d'être simultanément nuls. Cette conclusion établit que toute équation a une racine.

On a supposé, dans la démonstration précédente, que les coefficients étaient réels. Cette restriction peut être écartée; en effet,  $f(x)$  peut être représenté par

$$\varphi(x) + \sqrt{-1} \psi(x),$$

$\varphi$  et  $\psi$  renfermant seulement des coefficients réels. Si l'on a  $f'(x) = 0$ , on en tire

$$[\varphi'(x)]^2 = -[\psi(x)]^2,$$

ou

$$[\varphi(x)]^2 + [\psi(x)]^2 = 0.$$

Cette équation, nous venons de le prouver, a toujours une racine  $u + v\sqrt{-1}$ ; donc

$$\varphi(x) + \sqrt{-1} \psi(x) = 0,$$

ou

$$\varphi(x) - \sqrt{-1} \psi(x) = 0$$

aura une racine. Supposons que ce soit la première; mettant  $u + v\sqrt{-1}$  dans cette équation, on a un résultat de la forme

$$P + Q\sqrt{-1} + \sqrt{-1}(P' + Q'\sqrt{-1}) = 0$$

ou

$$P - Q' + \sqrt{-1} (P' + Q) = 0,$$

et par suite

$$P = Q', \quad P' = -Q.$$

Substituant  $u - \nu \sqrt{-1}$  dans la seconde, on a

$$P - Q \sqrt{-1} - \sqrt{-1} (P' - Q' \sqrt{-1}) = 0,$$

ou

$$P - Q' - \sqrt{-1} (P' + Q) = 0,$$

résultat vrai, en vertu des relations  $P = Q'$ ,  $P' = -Q$ .

Donc l'équation  $f(x) = 0$  a toujours une racine, que ses coefficients soient, ou non, réels.

---