

Bibliographie

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 10 (1871), p. 49-62

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1871_2_10__49_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1871, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

BIBLIOGRAPHIE (*)

Table de Logarithmes à vingt-sept décimales pour les calculs de précision, par FÉDOR THOMAN. Grand in-8°, 1867. — Paris, librairie Gauthier-Villars. Prix : 5 fr.

Le savant auteur de ce très-remarquable écrit a laissé de nombreux amis qui conserveront, avec une haute estime pour ses talents, le souvenir de son excellent et affectueux caractère. Les géomètres admiraient l'ingénieuse simplicité de ses méthodes, les administrateurs des grandes compagnies connaissaient l'exactitude irréprochable de ses calculs, et les financiers les plus actifs mettaient à profit la merveilleuse rapidité de ses réponses à des questions sans cesse renouvelées. Sa mort prématurée laisse un vide difficile à remplir. Nous ignorons le nom véritable caché sous le pseudonyme de Fédor Thoman. On raconte qu'un jour, au milieu d'une fête et devant de nombreux témoins, l'héritier de l'un des noms les plus illustres de la Russie le salua du titre de prince. Fédor Thoman, impassible, répondit simplement : « Vous êtes » sans doute abusé par quelque ressemblance. » Le seigneur russe s'inclina sans poursuivre la conversation, mais, un quart d'heure après, les deux compatriotes échangeaient quelques mots dans un salon écarté et s'éloignaient dans la même voiture.

Je n'ai ni le moyen ni le droit de rechercher ici un secret que, pendant un séjour de vingt-cinq ans, Fédor Thoman, je crois en être certain, n'a confié à aucun Français. Plus d'une supposition a été hasardée, mais aucune

(*) Extrait du *Journal des Savants*, décembre 1870.

Ann. de Mathémat., 2^e série, t. X. (Février 1871.)

d'elles, je veux me borner à le dire, n'a fait planer le plus léger soupçon sur la délicatesse et la droiture de cet homme excellent et réellement supérieur à plus d'un titre.

Les écrits de Fédor Thoman sont nombreux, il a abordé la chimie, la cristallographie, les hautes mathématiques et la théorie des opérations financières, en y portant la grande profondeur de savoir et la minutieuse précision dont sa nature lui faisait une loi. Je me propose seulement ici de faire connaître son opuscule sur le calcul des logarithmes, véritable tour de force à mes yeux et chef-d'œuvre de dextérité arithmétique. Le sujet est de haute importance ; il semblait depuis longtemps épuisé, lorsque Fédor Thoman est venu y apporter un progrès considérable et évident.

Les Tables de logarithmes employées par tous les calculateurs sont à sept décimales. Ce nombre de chiffres n'a pas été choisi au hasard, et il ne faut pas croire qu'avec huit ou dix figures on obtiendrait sans peine des calculs plus exacts. En effet, plus les calculs sont précis, plus on est assuré d'y rencontrer des nombres et surtout des logarithmes qui ne se trouvent pas exactement dans la table ; il faut alors, ceux qui ont calculé le savent, recourir à une interpolation. Une proportion suffit quand on calcule à sept décimales ; mais, si l'on en prend dix, cette proportion, dans le plus grand nombre de cas, donnerait trois chiffres inexacts et, par conséquent, plus nuisibles qu'utiles. Un coup d'œil jeté sur les Tables de Vlacq ne peut laisser sur ce point aucun doute : *les différences premières ne sont pas constantes*, et, pour en faire usage, il faut recourir aux formules d'interpolation, dont la complication, qui rend les calculs extrêmement pénibles, s'accroît rapidement avec le nombre des chiffres conservés. C'est pour cela, et non par des motifs d'économie, que les grandes Tables du cadastre à quinze déci-

males, qui devaient, dans l'intention du gouvernement républicain, *former le monument de calcul le plus vaste et le plus imposant qui eût jamais été exécuté ou même conçu*, n'ont pas encore été publiées et ne le seront vraisemblablement jamais.

Fédor Thoman, comme l'indique le titre de sa brochure, veut mettre à la disposition des calculateurs les logarithmes de tous les nombres et les nombres correspondants aux logarithmes avec une exactitude qui, jusqu'ici, n'a été ni atteinte ni cherchée, et les Tables complètes, qui sembleraient devoir remplir des centaines de volumes in-folio, pourraient aisément être réunies sur une seule page; si elles en occupent dix dans l'écrit que je signale à l'attention des savants, c'est qu'on n'a pas cherché à ménager la place.

Dans ces dix pages, cela va sans dire, les logarithmes ne sont pas inscrits, mais on trouve tout ce qu'il faut pour les calculer par un procédé toujours uniforme, qui n'exige que des additions et des multiplications dans lesquelles le multiplicateur n'a qu'un chiffre, et dans une seule il en a deux; aucune interpolation n'est nécessaire, et il n'y a pas une seule division.

La méthode de Fédor Thoman est fondée sur un principe fort simple, déjà utilisé par Briggs. Quand un nombre diffère peu de l'unité, le calcul de son logarithme est facile, et l'on a, en négligeant θ^2 ,

$$(1) \quad \log(1 + \theta) = k\theta,$$

k étant un facteur toujours le même, que l'on peut calculer une fois pour toutes, et dont une Table donne les produits par tous les nombres inférieurs à 100. Rien de plus facile dès lors que de former $k\theta$: quels que soient les chiffres de θ , on les partage en groupes de deux, et les produits par chaque groupe qui se trouvent écrits

dans la Table sont ensuite ajoutés les uns aux autres.

Toute la question se borne donc à réduire un nombre quelconque N à la forme $1 + \theta$, en faisant θ assez petit pour que la formule (1) soit applicable. La méthode très-ingénieuse de Thoman consiste à multiplier N par des facteurs successifs tellement choisis que le produit converge rapidement vers l'unité. Ces facteurs font toujours partie des nombres inscrits dans une Table; on trouve, *sans tâtonnement*, celui qui convient à chaque opération, et à côté de lui son logarithme calculé à l'avance; chaque facteur enfin, à partir du second, n'a qu'un chiffre significatif, et le premier en a deux. Soit donc N le nombre donné, p le premier facteur tellement choisi que Np diffère peu de l'unité; soient $1 - a$, $1 - b$, $1 - c$, ... les facteurs suivants dont les logarithmes sont $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$, ..., on aura

$$Np(1-a)(1-b)(1-c)\dots = 1 + \theta,$$

et

$$1N + 1p - \alpha - \beta - \gamma \dots = k\theta;$$

par conséquent,

$$1N = \text{comp. log } p + \alpha + \beta + \gamma + \dots + k\theta.$$

Pour bien montrer la simplicité de la méthode, calculons à 15 décimales le logarithme de $\pi = 3,141592653589793$.

Une première Table nous apprend que, les deux premiers chiffres étant 31, il convient d'adopter pour premier multiplicateur 32, afin que le produit diffère aussi peu que possible de l'unité (la position de la virgule est, bien entendu, insignifiante); le produit 32π est

$$100,530964914873376.$$

Les multiplicateurs $1 - a$, $1 - b$, $1 - c$, ... sont successivement $1 - 0,005$, $1 - 0,0002$, $1 - 0,00008$, $1 - 0,000003$, $1 - 0,0000003$, et le produit obtenu $1 + \theta$

est 1,0000000763015282, et l'on peut, sans commettre d'erreur sur le quinzième chiffre décimal, chercher son logarithme par la formule (1).

Voici le détail complet du calcul; tous les chiffres qui y sont inscrits sont directement copiés sur la Table sans calcul accessoire et sans tâtonnement.

$$\begin{array}{r}
 3,141592653589793 \times 32 \\
 \hline
 6283185307179586 \\
 9424777960769379 \\
 \hline
 1,00530964914873376 \times 1 - 0,005 \\
 502654824574367 \\
 28310090299009 \times 1 - 0,0002 \\
 20005662018060 \\
 8304428280949 \times 1 - 0,00008 \\
 8000664354262 \\
 303763926687 \times 1 - 0,000003 \\
 300000911292 \\
 3763015395 \times 1 - 0,00000003 \\
 113 \\
 \hline
 763015282 = \theta \\
 330063806 \\
 1302883 \\
 6514 \\
 122 \\
 1 \\
 \hline
 331373326 = \log(1 + \theta) \\
 1302883465 \\
 130288540004 \\
 3474494836873 \\
 8686758342858 \\
 217691925427455 \\
 49485002168009402 \\
 \hline
 \log \pi = 0,497149872694134
 \end{array}$$

Supposons maintenant qu'ayant à sa disposition les Tables à quinze décimales du cadastre, on veuille chercher le même logarithme, on y trouvera seulement ceux des nombres

$$31415, 31416, 31417, 31418, 31419, 31420,$$

et ces logarithmes serviront à calculer les différences successives dont la cinquième seulement est constante; il faudra donc, pour avoir le logarithme de π , faire usage de la formule d'interpolation du cinquième degré. En posant

$$q = 0,92653589793,$$

on devra ajouter au logarithme de 31415 le nombre donné par la formule :

$$\begin{aligned} q \Delta u + \frac{q(q-1)}{2} \Delta^2 u + \frac{q(q-1)(q-2)}{1.2.3} \Delta^3 u \\ + \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)}{1.2.3.4} \Delta^4 u \\ + \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)(q-4)}{1.2.3.4.5} \Delta^5 u, \end{aligned}$$

où Δu , $\Delta^2 u$, $\Delta^3 u$, $\Delta^4 u$, $\Delta^5 u$ sont les nombres fournis par la Table, et le calcul sera dix fois plus long au moins que celui de Fédor Thoman, dont la supériorité paraît décourageante pour les calculateurs qui voudraient, à l'avenir, perfectionner de nouveau le calcul numérique des logarithmes.

La recherche du nombre correspondant à un logarithme donné est tout aussi simple. Si le logarithme est petit et que l'on ait

$$\log x = \theta,$$

on pourra prendre

$$(2) \quad x = 1 + \frac{\theta}{k},$$

en négligeant le carré de θ .

Comment réduire maintenant un logarithme quelconque à ceux auxquels la formule (2) est applicable?

Thoman y parvient en retranchant successivement de ce logarithme des logarithmes connus dont l'ensemble forme deux petites Tables d'une page chacune et choisissant à chaque fois, dans la Table dont on doit faire usage, le logarithme le plus proche du résultat de la soustraction précédente.

Soient x le nombre cherché et $\log N$, $\log(1+a)$, $\log(1+b)$, \dots , etc., les logarithmes successivement soustraits, le nombre cherché sera

$$x = N(1+a)(1+b)(1+c)\dots \left(1 + \frac{\theta}{k}\right);$$

a , b , c ne contiennent chacun qu'un seul chiffre, et $\frac{\theta}{k}$ se calcule, comme on l'a dit, par de simples additions. Cherchons, par exemple, à onze décimales, le nombre dont le logarithme est

$$0,497149872694.$$

Le plus grand logarithme, parmi ceux des cent premiers nombres que l'on puisse retrancher du proposé, est celui de 31; il reste

$$0,005788178860$$

dont on retranche successivement les logarithmes de 1,01, 1,003, 1,0003, 1,00008, et il reste 0,000000861083, auquel peut s'appliquer la formule (2).

Voici tout le calcul :

$$\begin{array}{r}
 \log x = 0,497149872694 \\
 \hline
 491361693834 = \log 31 \\
 \hline
 5788178860 \\
 4321373783 = \log 1,01 \\
 \hline
 1466805077 \\
 1300933020 = \log 1,003 \\
 \hline
 165872057 \\
 130268805 = \log 1,0003 \\
 \hline
 35603252 \\
 34742169 = \log 1,00008 \\
 \hline
 861083 \\
 \hline
 1980223 \\
 2303 \\
 191 \\
 \hline
 1,000001982717 \times 1,00008 \\
 80000159 \\
 \hline
 1,000081982876 \times 1,0003 \\
 300024595 \\
 \hline
 1,000383153493 \times 1,003 \\
 3001146022 \\
 \hline
 1,003383153493 \times 1,01 \\
 1,0033831535 \\
 \hline
 1,013416985028 \times 31 \\
 30,40250955084 \\
 \hline
 x = 3,14159265359
 \end{array}$$

Il semble difficile de concevoir, pour la solution d'un tel problème, une méthode plus élégante et plus sûre et des calculs moins laborieux. Comme le grand nombre des chiffres inscrits dans chaque ligne est une des nécessités de la question, on ne doit s'attacher qu'à compter le

nombre des lignes, en remarquant que chacune s'écrit en quelque sorte sans travail, lorsqu'elle n'est pas purement et simplement copiée dans une Table d'une seule page.

Je n'essayerai pas de refaire ici l'histoire bien connue et souvent étudiée de la théorie des logarithmes. Six volumes in-4°, publiés en 1791 sous le titre général *Scriptores logarithmici*, démontrent suffisamment l'ardeur des tentatives sans cesse renouvelées depuis deux siècles pour simplifier les calculs en agrandissant le cadre des Tables. Je puis cependant, sans m'écarter du sujet de cet article, citer le nom illustre de Huyghens, qui ne figure pas dans la collection des *Scriptores logarithmici*. Fédor Thoman, en effet, avait étudié avec le plus grand soin les travaux de l'illustre géomètre relatifs au calcul numérique, et sa méthode, très-différente de celle d'Huyghens, montre pourtant qu'il en a fait son profit.

Les procès-verbaux manuscrits de l'Académie des Sciences pour l'année 1666 contiennent cette méthode très-ingénieuse, donnée sans démonstration et parfaitement élucidée dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (t. LXVI, n° 13; 1868) par un commentaire de Thoman (*). L'illustre académicien connaît évidemment la série qui représente $1(1+h)$, et que Mercator, d'ailleurs, publia en 1664, et sa méthode consiste à substituer à une certaine série, aisément déduite de celle de Mercator, une autre série dont les premiers termes sont les mêmes, et dont la somme exacte représente une fraction rationnelle aisée à calculer.

La méthode inventée par Huyghens est restée inédite jusqu'à ces derniers temps. Dans les œuvres imprimées de l'illustre géomètre, il n'en est fait aucune mention,

(*) Voir aussi les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2^e série, t. VII, p. 32; juillet 1868.

mais, chose singulière, on en trouve une autre fort différente de la sienne, dont Huyghens a accru la célébrité en critiquant très-justement l'une des assertions de son très-ingénieur et très-savant inventeur, Jacques Grégory. Les éditeurs des œuvres d'Huyghens ont inséré en entier, dans le second des quatre volumes qu'ils ont publiés, le Mémoire de Grégory, fondé sur la remarque, faite pour la première fois par Grégoire Saint-Vincent, de l'identité de la recherche d'un logarithme népérien avec le calcul d'une aire hyperbolique; et, pour calculer ce segment, Grégory emploie la méthode même qui donne l'aire du segment du cercle, c'est-à-dire l'évaluation de polygones inscrits et circonscrits dont le nombre des côtés va sans cesse en doublant. Les formules, dans les deux cas, sont exactement les mêmes. Une première difficulté se présente au début, mais elle est bien vite écartée : les polygones considérés dans le cercle sont réguliers, et leurs propriétés s'en déduisent. Quels doivent être, dans l'hyperbole, les polygones correspondants pour que l'analogie soit conservée? Quand on passe du cercle à l'ellipse, la solution s'aperçoit aisément. Le polygone inscrit ou circonscrit à l'ellipse doit être la projection du polygone régulier inscrit ou circonscrit au cercle, et, pour cela, les triangles ayant pour sommet commun le centre de l'ellipse et pour bases les divers côtés, doivent être équivalents. Il en est de même des polygones considérés par Grégory, inscrits ou circonscrits à un arc d'hyperbole. Les triangles dont leurs côtés sont les bases et dont les sommets sont au centre doivent être équivalents. La relation entre l'aire des polygones inscrits et circonscrits à un secteur hyperbolique et celles des polygones d'un nombre de côtés double sont alors les mêmes que pour le secteur circulaire, et le calcul de la surface d'un secteur hyperbolique devient par là extrêmement facile.

Après avoir ainsi choisi le procédé de calcul, Grégory aperçut aussitôt que certains secteurs, pour être obtenus avec une approximation donnée, exigent moins de calculs que d'autres, et, si l'on veut parler des logarithmes qu'il faut connaître, que ceux des nombres voisins de l'unité sont les plus faciles à obtenir. Le parti qu'il tire de cette remarque est fort ingénieux. Après avoir calculé à vingt-six décimales le logarithme népérien de 10, il veut ensuite obtenir ceux des nombres premiers inférieurs à 100, et, comme il les obtient par ordre en commençant par le plus petit, $\log 2$, il suffit évidemment, pour obtenir $\log p$, de trouver une fraction $\frac{a}{b}$, peu différente de l'unité et telle que, p étant l'un des facteurs des nombres a ou b premiers entre eux, les autres soient tous moindres que p . On a, par exemple,

$$664848 = 7 \times 13 \times 2^5 \times 3^6,$$

$$664849 = 31 \times 47^2,$$

et par conséquent

$$\log \frac{664849}{664848} = \log 31 + 2 \log 47 - \log 7 - \log 13 - 5 \log 2 - 6 \log 3,$$

et, le premier membre se calculant, on en déduira le logarithme de 47, lorsque ceux des nombres premiers inférieurs seront connus.

Les nombres auxiliaires dont Grégory fait usage pour calculer le logarithme de 2 et celui de 3 (celui de 10 étant connu) sont

$$1000 = 2^3 \times 5^3,$$

$$1024 = 2^{10},$$

$$32805 = 5 \times 3^6,$$

$$32768 = 2^{16}.$$

(60)

Les fractions $\frac{1024}{1000}$ et $\frac{32805}{32768}$ diffèrent notablement de l'unité, mais toutes celles qu'il considère ensuite s'en rapprochent bien davantage, et la différence entre les deux termes, qui grandissent rapidement, est toujours d'une seule unité. On a, par exemple,

$$2400 = 3 \times 2^5 \times 5^2,$$

$$2401 = 7^4,$$

$$9800 = 2^3 \times 5^2 \times 7^2,$$

$$9801 = 11 \times 3^4,$$

$$123200 = 7 \times 11 \times 5^2 \times 2^6,$$

$$123201 = 13^2 \times 3^6.$$

Le premier groupe servira à calculer le logarithme de 7, le second celui de 11, et le troisième celui de 13.

Les logarithmes des nombres inférieurs à 100 étant connus, pour obtenir les suivants, Grégory considère la formule

$$\frac{(a+1)(a-1)^3}{(a-2)a^3}.$$

Le numérateur et le dénominateur ont au moins les six premiers chiffres communs, elle diffère donc fort peu de l'unité, et son logarithme, étant connu, permettra de calculer $\log a$, au moyen des logarithmes qui le précèdent, car les facteurs de $a+1$, a étant impair, sont nécessairement moindres que a . Si, par exemple, on fait $a = 641$, la fraction est égale à

$$1 + \frac{1281}{168296446719}.$$

Elle est de celles pour lesquelles un seul terme de la formule donne, pour le logarithme, plus de douze décimales exactes.

D'après cet exposé, tout lecteur attentif comprendra

l'exactitude de la méthode de Grégory. Huyghens aussi ne l'a pas contestée, et la critique qu'il lui oppose porte sur un autre point. Le calcul successif des polygones peut être poussé aussi loin qu'on veut, et l'approximation qu'on en peut déduire n'a aucune limite. Mais pourrait-on obtenir le résultat exact et rigoureux? Peut-on, en un mot, assigner la limite vers laquelle converge cette suite indéfinie d'expressions que Grégory enseigne à former? Les deux premières étant A et B, celles qu'on en déduit A' et B', sont données par les équations

$$A' = \sqrt{AB},$$

$$B' = \frac{2AB}{A + \sqrt{AB}}.$$

Pour prouver qu'il est impossible d'assigner analytiquement la limite vers laquelle convergent les quantités ainsi calculées, Grégory fait le raisonnement suivant : Si cette limite existe, elle doit être une fonction déterminée de A et de B; nous écrivions aujourd'hui $\varphi(A, B)$; mais on aurait pu prendre pour valeur initiale A' et B'; la limite aurait été $\varphi(A', B')$; on doit donc avoir

$$\varphi(A, B) = \varphi(A', B').$$

Cela est parfaitement exact, mais le géomètre anglais affirme à tort, ou tout au moins sans preuve suffisante, que cette équation est impossible. Posons, dit-il,

$$(k) \quad \begin{cases} A = a^3 + a^2b, \\ B = ab^2 + b^3, \end{cases}$$

on en déduira

$$(h) \quad \begin{cases} A' = ab(a + b), \\ B' = 2ab^2, \end{cases}$$

et il affirme qu'aucune fonction algébrique de $a^3 + a^2b$

et de $ab^2 + b^3$ ne peut rester invariable quand on y remplace les deux binômes par les expressions (h). La preuve de Grégory est exposée en termes douteux et enveloppés, qui doivent tout d'abord la rendre suspecte. Il n'a pas le droit, d'ailleurs, de choisir arbitrairement A et B. A doit être un polygone inscrit et B le polygone circonscrit correspondant. Par conséquent, l'impossibilité de trouver une limite dans le cas qu'il a choisi n'entraînerait nullement la conséquence relative au cas dont on doit s'occuper. Il est singulier que Montucla, éclairé par la critique précise et ferme d'Huyghens, n'ait pas démêlé l'erreur de Grégory sous la subtilité apparente de sa polémique; le jugement qu'il en porte marque, en effet, un embarras que le géomètre ne doit pas connaître : « Les géomètres, dit-il, ne me paraissent pas avoir prononcé sur cette contestation, et, quoique je sois porté à regarder la démonstration de Grégory comme concluante, je les imiterai. »

On me pardonnera de revenir sur des travaux si anciens, fort oubliés, il est vrai, aujourd'hui, mais qui se trouvent dans toutes les bibliothèques. Leur souvenir chez moi est lié à celui de Thoman, qui les admirait et en parlait souvent. Il était bon juge sur les questions de ce genre, comme sur toutes celles qu'il avait étudiées à fond; le nombre en était grand; sur les autres il se taisait systématiquement : *Je ne saurais vous le dire* était la réponse la plus habituelle de ce curieux infatigable, dont les études profondes et variées n'ont cessé qu'avec la vie, et dont la mémoire, sans cesse exercée, était la plus sûre peut-être et la plus solidement nourrie qu'il m'ait été donné de consulter.

J. BERTRAND.