NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

DÉSIRÉ ANDRÉ

Théorèmes de statique

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 10 (1871), p. 497-503
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1871_2_10__497_1>

THÉORÈMES DE STATIQUE;

PAR M. DÉSIRÉ ANDRÉ.

I.

THÉORÈME. — *Étant donnés n points dans l'espace, la somme des carrés des droites qui joignent ces points deux à deux, de toutes les manières possibles, vaut n fois la somme des carrés des droites qui joignent ces mêmes points au centre de gravité du système qu'ils forment.*

Comme le carré de toute droite de l'espace est la somme des carrés des projections de cette droite sur trois axes rectangulaires, il suffit de démontrer le théorème pour n points en ligne droite.

Considérons donc n points en ligne droite; prenons pour origine le centre de gravité du système qu'ils forment; désignons leurs abscisses par $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$; et remarquons que, l'origine étant le centre de gravité,

$$\sum x = 0.$$

Cela posé, le carré de la droite qui joint les points d'indices α, β est

$$(1) \qquad (x_\alpha - x_\beta)^2;$$

celui de la droite qui joint le centre de gravité au point d'indice ε est

$$(2) \qquad x_\varepsilon^2.$$

Il suffit donc de prouver que la somme des expressions (1) vaut n fois la somme des expressions (2).

Or, on a évidemment

$$\sum (x_\alpha - x_\beta)^2 = \left\| \begin{matrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{matrix} \right\|^2,$$

ou bien

$$\sum (x_\alpha - x_\beta)^2 = \begin{vmatrix} n & \sum x \\ \sum x & \sum x^2 \end{vmatrix};$$

à cause de $\sum x = 0$, on a aussi

$$\begin{vmatrix} n & \sum x \\ \sum x & \sum x^2 \end{vmatrix} = n \sum x^2.$$

Donc

$$\sum (x_\alpha - x_\beta)^2 = n \sum x_\varepsilon^2. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

II.

Théorème. — *Étant donnés n points dans l'espace, la somme des carrés des aires des triangles ayant pour sommets ces points pris trois à trois, de toutes les manières possibles, vaut n fois la somme des carrés des aires des triangles ayant pour sommets le centre de* *gravité du système des n points et un couple quelconque de ces mêmes points pris deux à deux, de toutes les manières possibles.*

Comme le carré de l'aire de tout triangle est la somme des carrés des aires des projections de ce triangle sur trois plans rectangulaires, il suffit d'établir le théorème pour n points situés dans un même plan.

Considérons donc n points dans un plan; prenons pour origine le centre de gravité du système, et pour axes deux droites rectangulaires quelconques passant par l'origine; désignons par x_1y_1, $x_2y_2, \ldots$, x_ny_n les coordonnées des n points; et remarquons que, l'origine étant le centre de gravité du système, on a

$$\Sigma x = \Sigma y = 0.$$

Cela posé, le carré de l'aire du triangle qui a pour sommets les points d'indices α, β, γ est

$$(3)\qquad \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_\alpha & x_\beta & x_\gamma \\ y_\alpha & y_\beta & y_\gamma \end{vmatrix}^2;$$

le carré de l'aire de celui qui a pour sommets l'origine et les points d'indices ε, ζ est

$$(4)\qquad \frac{1}{4}\begin{vmatrix} x_\varepsilon & x_\zeta \\ y_\varepsilon & y_\zeta \end{vmatrix}^2.$$

Il suffit donc de prouver que, abstraction faite du facteur $\frac{1}{4}$, la somme des expressions (3) vaut n fois la somme des expressions (4).

Or, on a évidemment

$$\sum \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_\alpha & x_\beta & x_\gamma \\ y_\alpha & y_\beta & y_\gamma \end{vmatrix}^2 = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ y_1 & y_2 & \ldots & y_n \end{Vmatrix}^2,$$

ou bien

$$\sum \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_\alpha & x_\beta & x_\gamma \\ y_\alpha & y_\beta & y_\gamma \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} n & \Sigma x & \Sigma y \\ \Sigma x & \Sigma x^2 & \Sigma xy \\ \Sigma y & \Sigma yx & \Sigma y^2 \end{vmatrix};$$

on a aussi

$$\sum \begin{vmatrix} x_\varepsilon & x_\zeta \\ y_\varepsilon & y_\zeta \end{vmatrix}^2 = \begin{Vmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ y_1 & y_2 & \ldots & y_n \end{Vmatrix}^2,$$

ou bien

$$\sum \begin{vmatrix} x_\varepsilon & x_\zeta \\ y_\varepsilon & y_\zeta \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} \Sigma x^2 & \Sigma xy \\ \Sigma yx & \Sigma y^2 \end{vmatrix};$$

à cause de $\Sigma x = \Sigma y = 0$, on a enfin

$$\begin{vmatrix} n & \Sigma x & \Sigma y \\ \Sigma x & \Sigma x^2 & \Sigma xy \\ \Sigma y & \Sigma yx & \Sigma y^2 \end{vmatrix} = n \begin{vmatrix} \Sigma x^2 & \Sigma xy \\ \Sigma yx & \Sigma y^2 \end{vmatrix}.$$

Donc

$$\sum \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_\alpha & x_\beta & x_\gamma \\ y_\alpha & y_\beta & y_\gamma \end{vmatrix}^2 = n \sum \begin{vmatrix} x_\varepsilon & x_\zeta \\ y_\varepsilon & y_\zeta \end{vmatrix}^2.$$

C. Q. F. D.

III.

Théorème. — *Étant donnés n points dans l'espace, la somme des carrés des volumes des tétraèdres qui ont pour sommets ces n points pris quatre à quatre, de toutes les manières possibles, vaut n fois la somme des carrés des volumes des tétraèdres qui ont pour sommets le centre de gravité du système des n points, et un groupe de ces n points pris trois à trois, de tous les manières possibles.*

Pour le démontrer, prenons pour origine le centre de gravité du système des n points, et pour axes trois droites rectangulaires quelconques passant par cette origine; désignons par $x_1 y_1 z_1$, $x_2 y_2 z_2, \ldots, x_n y_n z_n$ les coordonnées des n points; et remarquons que, l'origine étant le centre de gravité, on a

$$\Sigma x = \Sigma y = \Sigma z = 0.$$

Cela posé, le carré du volume du tétraèdre qui a pour sommets les points d'indices α, β, γ, δ, est

$$(5) \qquad \frac{1}{36}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_\alpha & x_\beta & x_\gamma & x_\delta \\ y_\alpha & y_\beta & y_\gamma & y_\delta \\ z_\alpha & z_\beta & z_\gamma & z_\delta \end{vmatrix}^2;$$

et le carré du volume du tétraèdre qui a pour sommets l'origine et les points d'indice ε, ζ, η est

$$(6) \qquad \frac{1}{36}\begin{vmatrix} x_\varepsilon & x_\zeta & x_\eta \\ y_\varepsilon & y_\zeta & y_\eta \\ z_\varepsilon & z_\zeta & z_\eta \end{vmatrix}^2.$$

Il suffit donc de prouver que, abstraction faite du facteur $\frac{1}{36}$, la somme des expressions (5) vaut n fois la somme des expressions (6).

Or, on a évidemment

$$\Sigma \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_\alpha & x_\beta & x_\gamma & x_\delta \\ y_\alpha & y_\beta & y_\gamma & y_\delta \\ z_\alpha & z_\beta & z_\gamma & z_\delta \end{vmatrix}^2 = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ z_1 & z_2 & \ldots & z_n \end{Vmatrix}^2,$$

ou bien

$$\Sigma \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_\alpha & x_\beta & x_\gamma & x_\delta \\ y_\alpha & y_\beta & y_\gamma & y_\delta \\ z_\alpha & z_\beta & z_\gamma & z_\delta \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} n & \Sigma x & \Sigma y & \Sigma z \\ \Sigma x & \Sigma x^2 & \Sigma xy & \Sigma xz \\ \Sigma y & \Sigma yx & \Sigma y^2 & \Sigma yz \\ \Sigma z & \Sigma zx & \Sigma zy & \Sigma z^2 \end{vmatrix}.$$

on a aussi

$$\sum \begin{vmatrix} x_\varepsilon & x_\zeta & x_\eta \\ y_\varepsilon & y_\zeta & y_\eta \\ z_\varepsilon & z_\zeta & z_\eta \end{vmatrix}^2 = \begin{Vmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_n \end{Vmatrix}^2,$$

ou bien

$$\sum \begin{vmatrix} x_\varepsilon & x_\zeta & x_\eta \\ y_\varepsilon & y_\zeta & y_\eta \\ z_\varepsilon & z_\zeta & z_\eta \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} \Sigma x^2 & \Sigma xy & \Sigma xz \\ \Sigma yx & \Sigma y^2 & \Sigma yz \\ \Sigma zx & \Sigma zy & \Sigma z^2 \end{vmatrix};$$

enfin, à cause de $\Sigma x = \Sigma y = \Sigma z = 0$, on a

$$\begin{vmatrix} n & \Sigma x & \Sigma y & \Sigma z \\ \Sigma x & \Sigma x^2 & \Sigma xy & \Sigma xz \\ \Sigma y & \Sigma yx & \Sigma y^2 & \Sigma yz \\ \Sigma z & \Sigma zx & \Sigma zy & \Sigma z^2 \end{vmatrix} = n \begin{vmatrix} \Sigma x^2 & \Sigma xy & \Sigma xz \\ \Sigma yx & \Sigma y^2 & \Sigma yz \\ \Sigma zx & \Sigma zy & \Sigma z^2 \end{vmatrix}.$$

Donc

$$\sum \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_\alpha & x_\beta & x_\gamma & x_\delta \\ y_\alpha & y_\beta & y_\gamma & y_\delta \\ z_\alpha & z_\beta & z_\gamma & z_\delta \end{vmatrix}^2 = n \sum \begin{vmatrix} x_\varepsilon & x_\zeta & x_\eta \\ y_\varepsilon & y_\zeta & y_\eta \\ z_\varepsilon & z_\zeta & z_\eta \end{vmatrix}^2,$$

C. Q. F. D.

IV.

Remarque. — Si l'on désigne par ΣL^2, ΣS^2, ΣV^2 et Σl^2, Σs^2, Σv^2 les sommes des carrés des lignes, surfaces et volumes considérés dans les énoncés précédents (les lettres minuscules se rapportant aux figures dont l'origine fait partie), les trois théorèmes qu'on vient de démontrer peuvent se résumer ainsi :

$$\frac{\Sigma L^2}{\Sigma l^2} = \frac{\Sigma S^2}{\Sigma s^2} = \frac{\Sigma V^2}{\Sigma v^2} = n.$$

Remarque. — Les droites qui joignent les n points donnés au centre de gravité peuvent être regardées, soit comme n forces appliquées au même point et se faisant équilibre, soit comme les parallèles menées d'un même point aux n côtés d'un contour fermé. Chacune de ces manières d'envisager ces droites permet de modifier les énoncés des théorèmes précédents.

Remarque. — Les trois démonstrations développées ci-dessus reposent sur un même fait algébrique. Ce fait est général ; mais on ne lui voit pas d'autre interprétation géométrique que les précédentes.

Remarque. — Le premier des trois théorèmes qui précèdent a déjà, m'a-t-on dit, été donné par Carnot. Les deux derniers sont probablement nouveaux.