Solutions des questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 10 (1871), p. 424-431

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1871_2_10__424_0>

SOLUTIONS DES QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 948

(voir 2e série, t. VIII, p. 277).

PAR M. O. CALLANDREAU,
Étudiant en Mathématiques, à Angoulême.

L'aire d'un polygone de m côtés est égale à la somme des $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ *triangles que l'on peut former avec* $m-1$ *de ses côtés combinés deux à deux; chacun de ces triangles ayant deux de ses côtés égaux aux côtés correspondants du polygone et dirigés de la même manière.* (G. BELLAVITIS.)

Le théorème qui fait l'objet de la question 948 est une généralisation d'une formule qui se trouve dans les *Nouvelles Annales* (*voir* 2e série, t. VIII, p. 311).

Soit un polygone de m côtés, désignons ses sommets par les lettres A, B, C, D,....

Si du sommet A, par exemple, on mène les diagonales, on le partagera en $m-2$ triangles.

Le premier triangle, ou celui qui a pour sommets A, B, C, a pour valeur, d'après la formule mentionnée plus haut,

$$\mathrm{ABC} = \frac{i}{4}(\mathrm{AB}\operatorname{conj}\mathrm{BC} - \mathrm{BC}\operatorname{conj}\mathrm{AB}).$$

Le deuxième triangle, ou celui qui a pour sommets A, C, D, a pour valeur

$$\mathrm{ACD} = \frac{i}{4}(\mathrm{AC}\operatorname{conj}\mathrm{CD} - \mathrm{CD}\operatorname{conj}\mathrm{AC});$$

or $AC = AB + BC$, d'après une règle fondamentale du calcul des équipollences.

Donc ACD sera égal à la somme

$$\frac{i}{4}(\mathrm{AB}\,\mathrm{conj}\,\mathrm{CD} - \mathrm{CD}\,\mathrm{conj}\,\mathrm{AB}) + \frac{i}{4}(\mathrm{BC}\,\mathrm{conj}\,\mathrm{CD} - \mathrm{CD}\,\mathrm{conj}\,\mathrm{BC}).$$

La 1^{re} partie de la somme représentera le triangle formé avec CD et une ligne équipollente à AB (ou égale à AB et dirigée de la même manière).

La 2^e partie représentera le triangle formé avec CD et l'équipollente à BC.

. . . .

De même le $(m-2)^e$ triangle sera égal à la somme de $m-2$ triangles formés par la combinaison du $(m-1)^e$ côté avec les équipollents des 1^{er}, 2^e,..., $(m-2)^e$ côtés : AB, BC,....

De là il suit que l'aire du polygone sera égale à la somme de

$$1, 2, 3, \ldots, m-2 \quad \text{ou} \quad \frac{(m-1)(m-2)}{2}$$

triangles formés avec $(m-1)$ de ses côtés combinés deux à deux, chacun de ces triangles ayant deux de leurs côtés égaux aux côtés correspondants du polygone, et dirigés de la même manière.

Note. — La même question a été résolue, sans employer le calcul des équipollences, par M. Moret-Blanc, professeur au lycée du Havre, et M. Kruschwitz, étudiant à Berlin.

Question 958

(voir 2e série, t. VIII, p. 480);

PAR M. O. CALLANDREAU,

Étudiant en Mathématiques à Angoulême.

Faire passer par un point une circonférence qui coupe, sous des angles donnés, deux circonférences données.

Détermination graphique du centre et du rayon de la circonférence cherchée.

Nombre des solutions du problème.

Je m'appuie sur ce principe, que la transformée par rayons vecteurs réciproques d'un cercle sur lequel se trouve l'origine est une droite perpendiculaire au diamètre origine.

Cela posé, le problème étant supposé résolu, je transforme la figure par rayons vecteurs réciproques, en prenant pour origine le point donné, et pour puissance le carré de la tangente menée du point à l'un des cercles donnés.

L'un des cercles ne change pas par la transformation, l'autre se transforme en un nouveau cercle, qu'on construit facilemement par la règle et le compas.

Enfin, le cercle qui doit couper les deux cercles donnés sous des angles donnés se transforme en une droite, d'après ce qui a été dit au commencement. On voit en outre, par les propriétés de la transformation en question, que cette droite coupera les deux cercles transformés sous les mêmes angles que le cercle cherché.

Réciproquement, si une droite coupe les deux cercles transformés sous les angles donnés dans la figure primitive, la droite sera remplacée par un cercle qui coupera les deux cercles primitifs sous les mêmes angles.

Le problème est donc ramené à mener une sécante à deux cercles telle, qu'elle coupe les deux cercles sous des angles donnés : problème qui se ramène évidemment à mener une tangente commune à deux cercles.

La droite une fois trouvée, il ne restera plus qu'à abaisser sur elle du point donné une perpendiculaire, et à achever la construction du cercle primitif, ce qui n'offre aucune difficulté.

Le problème : « mener une tangente commune à deux cercles » ayant en général quatre solutions, on voit que le problème primitif admet en général quatre solutions.

Le nombre des solutions du problème primitif, et le nombre des solutions du problème : « mener une tangente commune aux deux cercles, » sera toujours le même.

Note. — Nous avons reçu de M. Émile Laclais, à Paris, une solution analogue.

Question 962

(voir 2ᵉ série, t. VIII, p. 528);

PAR M. A. BURTAIRE,

Maître auxiliaire au lycée de Nancy.

Par un point P *pris dans le plan d'une conique, on mène une sécante qui coupe en* A *la courbe et en* B *un certain diamètre fixe. Par les points* A *et* B, *on mène des parallèles au diamètre et à la direction conjuguée. On demande le lieu de leurs points d'intersection.*

CAS PARTICULIER. — *La conique est un cercle et le point fixe est pris sur une tangente. Forme de la courbe.*

(A. GUÉBHARD.)

J'examinerai séparément les trois cas où la conique donnée est une ellipse, une hyperbole ou une parabole. Cela permettra de donner moins d'extension à la remarque que l'auteur a faite sur le degré de l'équation du lieu. Elle n'est du quatrième degré que dans le cas des coniques bifocales; elle est du second degré dans le cas de la parabole.

1° *Cas de l'ellipse.* — Je prends pour axes coordonnés le diamètre fixe OX et son conjugué OY.

Soient α, β les coordonnées du point P. Une sécante qui y passe a pour équation

$$(1)\qquad y-\beta=m(x-\alpha),$$

la parallèle au conjugué du diamètre fixe, menée par le point B où la sécante coupe l'axe OX

$$(2) \qquad m(x-\alpha)+\beta=0.$$

Les deux parallèles au diamètre menées des points de rencontre de cette sécante avec l'ellipse

$$(3) \qquad a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2=0$$

sont les racines de l'équation obtenue par l'élimination de x entre (1) et (3).

L'équation du lieu s'obtiendra donc en éliminant m entre cette équation résultante et (2). On a ainsi

$$(4) \qquad a^2\beta^2y^2+b^2[\beta x-y(x-\alpha)]^2-a^2b^2\beta^2=0.$$

2° *Cas de l'hyperbole.* — L'équation du lieu se déduit de la précédente par le changement de b^2 en $-b^2$:

$$(5) \qquad a^2\beta^2y^2-b^2[\beta x-y(x-\alpha)]^2+a^2b^2\beta^2=0.$$

3° *Cas de la parabole.* — Je rapporte cette courbe au diamètre OX, et à la tangente au point où il la coupe. Son équation sera alors

$$(3') \qquad y^2-2px=0.$$

Les équations (1) et (2) sont maintenues.

Par un raisonnement identique à celui qui est relatif à l'ellipse, on arrive, pour l'équation du lieu, à l'équation suivante :

$$(6) \qquad \beta y^2+2pxy-2p\alpha y-2p\beta x=0.$$

Ici ce n'est donc plus une courbe du quatrième degré, mais une hyperbole dont le centre est au point

$$x=\alpha-\frac{\beta^2}{p}, \quad y=\beta.$$

L'une des asymptotes a pour équation

$$y = \beta,$$

l'autre

$$\beta y + 2px + (\beta^2 - 2p\alpha) = 0.$$

Il est à remarquer que si le point donné était sur la parabole, la seconde asymptote passerait par l'origine.

Cas particulier. — Si la conique est un cercle, les deux demi-diamètres conjugués a et b sont égaux, et l'équation (4) devient, après la suppression du facteur commun,

$$\beta^2 y^2 + [\beta x - y(x - \alpha)]^2 - a^2\beta^2 = 0,$$

que l'on peut écrire aussi

$$(4') \quad \beta^2(x^2 + y^2 - \alpha^2) + y(x - \alpha)[y(x - \alpha) - 2\beta x] = 0.$$

Cette dernière forme indique que le lieu passe par les deux points communs au cercle proposé et à l'hyperbole équilatère représentée par l'expression entre crochets égalée à zéro. Cette hyperbole passe par l'origine, et a pour asymptotes les parallèles aux axes menées du point P. La courbe passe aussi par les deux extrémités du diamètre fixe. Elle est tangente aux deux parallèles au diamètre fixe menées des extrémités de celui qui est perpendiculaire, et rencontre celui-ci en des points également distants du centre. En outre, elle est tangente aux perpendiculaires au diamètre proposé élevées des points où les tangentes au cercle issues de P rencontrent cet axe.

Discussion et forme de la courbe.

(a). Le lieu est limité lorsque le point P est en dehors des deux tangentes au cercle parallèles au diamètre fixe.

Lorsque le point P est à l'intérieur de ces deux parallèles, la courbe se compose de deux portions qui s'étendent à l'infini de deux côtés et qui ont pour asymptote commune la parallèle au diamètre fixe menée du point P.

(*b*). Si ce point intérieur aux parallèles est extérieur au cercle, les deux branches de chaque portion de courbe vont à l'infini d'un même côté, différent d'ailleurs pour chacune des portions.

(*c*). Si ce point intérieur aux parallèles est aussi intérieur au cercle, les deux branches de chaque partie de la courbe vont à l'infini de deux côtés opposés.

(*d*). Si le point P se trouve sur le cercle, les deux portions se rejoignent et la courbe qui est continue se compose de deux branches infinies de côtés différents, et traversant l'asymptote qui fait aussi partie du lieu.

(*e*). Si le point est sur l'une des tangentes parallèles au diamètre fixe, la courbe est continue et composée de deux branches allant à l'infini d'un même côté.

(*f*), (*g*), (*h*). Comme cas particuliers de (*a*), (*c*) et (*e*), le point fixe peut être sur le diamètre conjugué du proposé. Alors le diamètre perpendiculaire à l'axe fixe est un axe de symétrie.

(*i*). Enfin, si le point se trouvait sur le diamètre fixe, le lieu se réduirait à la perpendiculaire élevée à ce diamètre par le point P. L'analyse donne aussi ce diamètre qui ne convient pas à la question géométrique.

Dans le cas (*h*), l'asymptote fait aussi partie du lieu, ainsi que dans le cas (*d*).

Note. — La même question a aussi éte traitée par MM. Fould, élève de Mathematiques spéciales à Paris; Émile Laclais, à Paris; Michaud et Laverlochère, du college Stanislas; L. Bossut, de Lyon; Willière, professeur à Arlon; C. Harkema, étudiant à Saint-Pétersbourg.

Question 1010

(voir 2e série, t. IX, p. 384);

PAR M. A. MORET-BLANC,
Professeur au lycée du Havre.

Trouver les nombres dont les carrés s'écrivent toujours de la même façon dans tout système de numération analogue au système décimal, dont la base est plus grande que 4.

Soit

$$ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \ldots + kx + l$$

un nombre écrit dans le système dont la base est $x > 4$. Pour que son carré s'écrive de la même manière, quel que soit x, il faut et il suffit que, dans le développement de

$$(ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \ldots + kx + l)^2,$$

chaque coefficient soit inférieur à la plus petite base, c'est-à-dire à 5, ce qui aura lieu si ces trois conditions sont remplies :

1° Qu'aucun chiffre ne soit supérieur à 2;

2° Que la somme des produits de deux chiffres consécutifs et des chiffres qui en sont équidistants ne soit pas > 2;

3° Que le carré d'un chiffre plus la somme des doubles produits des chiffres qui en sont équidistants ne soit pas supérieure à 4.

Voici les nombres de 1, 2, 3, 4 chiffres qui satisfont à ces conditions :

1, 2; 10, 11, 12, 20, 21; 100, 101, 102, 110, 111, 120, 200, 201, 210; 1000, 1001, 1002, 1010, 1011, 1012, 1020, 1021, 1100, 1101, 1102, 1110, 1111, 1200, 1201, 2000, 2001, 2002, 2010, 2011, 2012, 2100, 2102.