DÉSIRÉ ANDRÉ

Développements de $\sin(n\alpha + z)$, de $\cos(n\alpha + z)$, de $\sin^n \alpha$ et de $\cos^n \alpha$

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 10 (1871), p. 359-368

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1871_2_10__359_1>

DÉVELOPPEMENTS DE $\sin(n\alpha + z)$, DE $\cos(n\alpha + z)$, DE $\sin^n\alpha$ ET DE $\cos^n\alpha$;

PAR M. DÉSIRÉ ANDRÉ.

I.

1. *Développement de* $\sin(n\alpha + z)$. — Considérons la fonction

$$y = e^{x\cos\alpha}\sin(x\sin\alpha).$$

Si nous prenons, par rapport à x, les dérivées successives de y, nous trouvons

$$\frac{dy}{dx} = e^{x\cos\alpha}\sin(\alpha + x\sin\alpha),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{x\cos\alpha}\sin(2\alpha + x\sin\alpha),$$

et, en général,

$$\frac{d^ny}{dx^n} = e^{x\cos\alpha}\sin(n\alpha + x\sin\alpha).$$

Afin d'obtenir une autre expression de $\frac{d^ny}{dx^n}$, posons

$$u = \sin(x\sin\alpha)$$

et

$$v = e^{x\cos\alpha}.$$

Nous avons alors

$$y = uv,$$

et, d'après la formule de Leibnitz,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \frac{d^k u}{dx^k} \frac{d^{n-k} v}{dx^{n-k}}.$$

Or,

$$\frac{d^k u}{dx^k} = \sin^k \alpha \sin\left(\frac{k\pi}{2} + x \sin\alpha\right),$$

$$\frac{d^{n-k} v}{dx^{n-k}} = e^{x\cos\alpha} \cos^{n-k}\alpha.$$

Donc

$$\frac{d^n y}{dx^n} = e^{x\cos\alpha} \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \sin^k\alpha \cos^{n-k}\alpha \sin\left(\frac{k\pi}{2} + x\sin\alpha\right).$$

Égalons les deux expressions de $\frac{d^n y}{dx^n}$; supprimons le facteur $e^{x\cos\alpha}$ commun aux deux expressions; remplaçons $x \sin\alpha$ par z, nous trouvons l'identité

$$(1) \qquad \sin(n\alpha + z) = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \sin^k\alpha \cos^{n-k}\alpha \sin\left(\frac{k\pi}{2} + z\right),$$

qui nous donne le développement de $\sin(n\alpha + z)$.

Remarque. — Dans l'identité (1), C_n^k représente le nombre des combinaisons simples de n objets k à k, et l'on convient de regarder C_n^0 comme égal à l'unité.

2. Dans l'identité précédente, α et z sont quelconques, mais n est un nombre entier supérieur à zéro. Soit p un nombre quelconque; posons

$$n\alpha + z = p\alpha,$$

ce qui donne

$$z = (p - n)\alpha,$$

et portons cette valeur de z dans l'identité (1), nous obtenons l'identité

$$(2)\quad \sin p\alpha = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \sin^k\alpha \cos^{n-k}\alpha \sin\left[\frac{k\pi}{2} + (p-n)\alpha\right],$$

qui nous donne, quel que soit p, le développement de $\sin p\alpha$.

3. Si, dans l'identité (2), on remplace successivement p par les nombres n, 1, 0, on obtient les trois identités suivantes

$$(3)\quad \sin n\alpha = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \sin^k\alpha \cos^{n-k}\alpha \sin\frac{k\pi}{2},$$

$$(4)\quad \sin\alpha = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \sin^k\alpha \cos^{n-k}\alpha \sin\left[\frac{k\pi}{2} - (n-1)\alpha\right],$$

$$(5)\quad 0 = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \sin^k\alpha \cos^{n-k}\alpha \sin\left(\frac{k\pi}{2} - n\alpha\right).$$

Remarque. — On voit que l'identité (3), qui est si connue, s'obtient ainsi comme cas particulier d'une formule plus générale, sans recourir à la considération des imaginaires.

II.

4. *Développement de* $\cos(n\alpha + z)$. — On peut l'obtenir, soit en dérivant par rapport à z les deux membres de l'identité (1), soit en égalant entre elles les deux expressions de la dérivée $n^{ième}$ de la fonction

$$y = e^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha).$$

Ces procédés conduisent tous deux à l'identité

$$(6)\qquad \cos(n\alpha + z) = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \sin^k\alpha \cos^{n-k}\alpha \cos\left(\frac{k\pi}{2} + z\right),$$

qui donne le développement cherché.

5. Soit p un nombre quelconque; posons

$$n\alpha + z = p\alpha;$$

il en résulte

$$z = (p - n)\alpha.$$

Portons cette valeur de z dans l'identité (6), nous trouvons

$$(7)\qquad \cos p\alpha = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \sin^k\alpha \cos^{n-k}\alpha \cos\left[\frac{k\pi}{2} + (p - n)\alpha\right],$$

identité qui donne, quel que soit p, le développement de $\cos p\alpha$.

6. Si, dans l'identité (7), on remplace successivement p par les nombres n, 1, 0, on trouve les trois identités suivantes :

$$(8)\qquad \cos n\alpha = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \sin^k\alpha \cos^{n-k}\alpha \cos\frac{k\pi}{2},$$

$$(9)\qquad \cos\alpha = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \sin^k\alpha \cos^{n-k}\alpha \cos\left[\frac{k\pi}{2} - (n - 1)\alpha\right],$$

$$(10)\qquad 1 = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \sin^k\alpha \cos^{n-k}\alpha \cos\left(\frac{k\pi}{2} - n\alpha\right).$$

Remarque. — Dans l'identité (8), de même que dans l'identité (3), si l'on remplace α par $\frac{\pi}{4}$, on obtient une formule qui donne, après réduction, la somme des coefficients du développement.

III.

7. *Développement de* $\cos^n \alpha$. — Considérons la fonction

$$y = e^{2x\cos\alpha}\cos^2(x\sin\alpha) = \frac{1}{2}e^{2x\cos\alpha} + \frac{1}{2}e^{2x\cos\alpha}\cos(2x\sin\alpha),$$

nous trouvons, pour sa dérivée $n^{ième}$, par rapport à x, les deux expressions suivantes :

$$\frac{d^n y}{dx^n} = 2^{n-1}e^{2x\cos\alpha}\cos^n\alpha + 2^{n-1}e^{2x\cos\alpha}\cos(n\alpha + 2x\sin\alpha)$$

et

$$\frac{d^n y}{dx^n} = e^{2x\cos\alpha}\sum_{n=0}^{n=k} C_n^k \cos(k\alpha + x\sin\alpha)\cos[(n-k)\alpha + x\sin\alpha].$$

Égalons ces deux expressions; supprimons le facteur commun $e^{2x\cos\alpha}$; remplaçons $x\sin\alpha$ par z, et divisons les deux membres par 2^{n-1}, il vient

$$\begin{aligned}&\cos^n\alpha + \cos(n\alpha + 2z)\\ &\quad = \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \cos(k\alpha + z)\cos[(n-k)\alpha + z],\end{aligned}$$

d'où

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned}\cos^n\alpha = &-\cos(n\alpha + 2z)\\ &+ \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \cos(k\alpha + z)\cos[(n-k)\alpha + z].\end{aligned}\right.$$

Cette identité donne le développement de $\cos^n\alpha$.

8. En opérant de la même manière sur la fonction

$$y = e^{2x\cos\alpha}\sin^2(x\sin\alpha) = \frac{1}{2}e^{2x\cos\alpha} - \frac{1}{2}e^{2x\cos\alpha}\cos(2x\sin\alpha),$$

on arrive à l'identité

$$(12)\quad \left\{ \begin{aligned} \cos^n\alpha &= \cos(n\alpha + 2z) \\ &\quad + \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \sin(k\alpha + z)\sin[(n-k)\alpha + z], \end{aligned} \right.$$

qui donne un autre développement de $\cos^n\alpha$.

9. Soit p un nombre quelconque. Posons

$$n\alpha + 2z = p\alpha,$$

d'où

$$z = \frac{p-n}{2}\alpha;$$

et portons cette valeur de z dans les identités (11) et (12).

Nous trouvons

$$(13)\quad \left\{ \begin{aligned} \cos^n\alpha &= -\cos p\alpha \\ &\quad + \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \cos\frac{(2k+p-n)\alpha}{2}\cos\frac{(2k-p-n)\alpha}{2}, \end{aligned} \right.$$

$$(14)\quad \left\{ \begin{aligned} \cos^n\alpha &= \cos p\alpha \\ &\quad - \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \sin\frac{(2k+p-n)\alpha}{2}\sin\frac{(2k-p-n)\alpha}{2}. \end{aligned} \right.$$

Ces formules sont vraies quel que soit p.

10. Dans les identités (13) et (14), donnons successivent à p les valeurs n, 1, 0: nous obtiendrons les six

identités suivantes :

$$\cos^n\alpha = -\cos n\alpha + \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \cos k\alpha \cos(k-n)\alpha,$$

$$\cos^n\alpha = \cos n\alpha - \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \sin k\alpha \sin(k-n)\alpha,$$

$$\cos^n\alpha = -\cos\alpha + \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \cos\frac{(2k+1-n)\alpha}{2}\cos\frac{(2k-1-n)\alpha}{2},$$

$$\cos^n\alpha = \cos\alpha - \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \sin\frac{(2k+1-n)\alpha}{2}\sin\frac{(2k-1-n)\alpha}{2},$$

$$\cos^n\alpha = -1 + \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \cos^2\frac{(2k-n)\alpha}{2},$$

$$\cos^n\alpha = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \sin^2\frac{(2k-n)\alpha}{2}.$$

11. Ajoutons membres à membres les deux dernières identités, nous trouvons

$$\cos^n\alpha = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \cos^2\frac{(2k-n)\alpha}{2} - \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \sin^2\frac{(2k-n)\alpha}{2},$$

d'où

$$\cos^n\alpha = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \cos(2k-n)\alpha.$$

Cette dernière formule est celle que l'on donne ordinairement dans les traités de calcul différentiel.

IV.

12. *Développement de* $\sin^n\alpha$. — Remplaçons α par $\frac{\pi}{2}-\alpha$ dans les deux identités (11) et (12); nous trouvons

$$\sin^n\alpha = -\cos\left[n\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+2z\right]$$
$$+\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \cos\left[k\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+z\right]\cos\left[(n-k)\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+z\right],$$

$$\sin^n\alpha = \cos\left[n\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+2z\right]$$
$$+\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \sin\left[k\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+z\right]\sin\left[(n-k)\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+z\right].$$

13. Remplaçons de même α par $\frac{\pi}{2}-\alpha$ dans les identités (13) et (14); il vient

$$\sin^n\alpha = -\cos\frac{p(\pi-2\alpha)}{2}$$
$$+\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \cos\frac{(2k+p-n)(\pi-2\alpha)}{4}\cos\frac{(2k-p-n)(\pi-2\alpha)}{4},$$

$$\sin^n\alpha = \cos\frac{p(\pi-2\alpha)}{2}$$
$$-\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \sin\frac{(2k+p-n)(\pi-2\alpha)}{4}\sin\frac{(2k-p-n)(\pi-2\alpha)}{4}.$$

Remarque. — Dans ces deux dernières égalités, p est un nombre quelconque.

14. Dans les identités précédentes, remplaçons p successivement par n, 1 et 0; nous obtiendrons les six identités suivantes :

$$\sin^n\alpha = -\cos\frac{n(\pi-2\alpha)}{2} + \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \cos\frac{k(\pi-2\alpha)}{2}\cos\frac{(k-n)(\pi-2\alpha)}{2},$$

$$\sin^n\alpha = \cos\frac{n(\pi-2\alpha)}{2} - \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \sin\frac{k(\pi-2\alpha)}{2}\sin\frac{(k-n)(\pi-2\alpha)}{2},$$

$$\sin^n\alpha = -\sin\alpha + \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \cos\frac{(2k+1-n)(\pi-2\alpha)}{4}\cos\frac{(2k-1-n)(\pi-2\alpha)}{4},$$

$$\sin^n\alpha = \sin\alpha - \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \sin\frac{(2k+1-n)(\pi-2\alpha)}{4}\sin\frac{(2k-1-n)(\pi-2\alpha)}{4},$$

$$\sin^n\alpha = -1 + \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \cos^2\frac{(2k-n)(\pi-2\alpha)}{4},$$

$$\sin^n\alpha = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \sin^2\frac{(2k-n)(\pi-2\alpha)}{4}.$$

15. Ajoutons membres à membres les deux dernières identités; nous trouvons

$$\sin^n\alpha = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \cos\frac{(2k-n)(\pi-2\alpha)}{2}.$$

16. Cette dernière identité peut être mise sous une autre forme. On a, en effet,

$$\cos\frac{(2k-n)(\pi-2\alpha)}{2}$$
$$=\cos k\pi\left[\cos\frac{n\pi}{2}\cos(n-2k)\alpha+\sin\frac{n\pi}{2}\sin(n-2k)\alpha\right];$$

il en résulte

$$\sin^n\alpha=\frac{1}{2^n}\cos\frac{n\pi}{2}\sum_{k=0}^{k=n}C_n^k\cos k\pi\cos(n-2k)\alpha$$
$$+\frac{1}{2^n}\sin\frac{n\pi}{2}\sum_{k=0}^{k=n}C_n^k\cos k\pi\sin(n-2k)\alpha.$$

Ici, le second membre se compose de deux développements. Si n est pair, $\sin\frac{n\pi}{2}$ s'annule, le second membre se réduit à son premier terme. Si n est impair, $\cos\frac{n\pi}{2}$ s'annule, et le second membre se réduit à son dernier terme. On retrouve ainsi les formules que donnent les traités de calcul différentiel pour le développement de $\sin^n\alpha$.