

Solutions des questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 10
(1871), p. 327-335

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1871_2_10__327_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1871, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*

<http://www.numdam.org/>

**SOLUTIONS DES QUESTIONS PROPOSÉES
DANS LES NOUVELLES ANNALES.**

Question 862

voir 2^e série, t. VII, p. 1917.

PAR M. ALFRED GIARD,

Élève de l'École Normale supérieure.

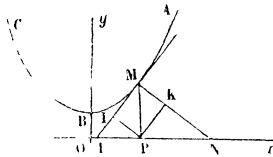
Lorsqu'une chaînette roule sur une droite, une droite quelconque de son plan enveloppe une développante de parabole.

(A. RIBAUCCOUR.)

Rappelons d'abord les propriétés remarquables de la chaînette. Si l'on suppose la courbe rapportée aux axes Ox , Oy , son équation est (*)

$$y = \frac{h}{2} \left(e^{\frac{x}{h}} + e^{-\frac{x}{h}} \right).$$

1° La longueur de la normale MN est égale au rayon de courbure;



2° La projection MI de l'ordonnée du point de contact sur la tangente est égale à l'arc BM qui va du sommet de la courbe à ce point;

3° La projection MK de la même ordonnée sur la normale est constante et égale à h ; de sorte que, dans le roulement de la chaînette sur la droite MI , la droite Tx passe constamment par le point P .

Quand une courbe S roule sur une courbe S' , une courbe u , invariablement liée à S , enveloppe une certaine courbe u' . Soient r et r' les rayons de courbure de la courbe mobile et de la courbe fixe; ρ et ρ' les rayons de courbure de l'enveloppe et de l'enveloppée, n la partie de la normale à l'enveloppe comprise entre cette courbe et la courbe fixe; on a la relation bien connue

$$(1) \quad \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = \cos \varphi \left(\frac{1}{\rho - n} + \frac{1}{\rho' + n} \right),$$

(*) STURM, *Cours de Mécanique*, t. II, p. 6

φ étant l'angle de la normale à l'enveloppe avec la normale commune aux deux courbes S et S' .

Considérons l'axe Oy de la chaînette; la normale à l'enveloppe de cette droite passe par le point M , centre instantané de rotation. Dans le cas qui nous occupe, r' et ρ' sont infinis; donc la relation (1) devient

$$\frac{1}{r} = \frac{\cos \varphi}{\rho - n}.$$

Si, du point N , on abaisse NQ perpendiculaire sur la parallèle à Ox menée par le point M , le point de rencontre Q de cette perpendiculaire avec la normale à l'enveloppe est le centre de courbure de cette courbe, car on a bien

$$QM = r \cos \varphi = \rho - n.$$

Cela posé, je dis que le lieu du point Q , c'est-à-dire la développée de l'enveloppe, est une parabole.

En effet, la figure $QMPN$ est un rectangle, donc l'angle NMQ est égal à l'angle PQM , donc la développée est une courbe telle que sa tangente QM fait des angles égaux avec la droite QP qui joint le point de contact au point fixe P , et avec la droite MN parallèle à une direction fixe. Cette développée est donc une parabole, et, par suite, l'enveloppe de Oy est une développante de parabole.

La parabole lieu du point Q a pour foyer le point P .

La tangente au sommet est la droite IM , puisque le point M , projection du foyer sur la tangente MQ , est sur IM .

Il est évident que toute droite du plan liée à la chaînette fera avec Oy un angle constant, et par suite enveloppera une courbe qu'on pourra amener, par un déplacement dans le plan, à coïncider avec l'une des

homothétiques de la développante de parabole enveloppe de $O\gamma$.

Note. — La même question a aussi été résolue par MM. Lemaitre, maître-répétiteur au lycée de Besançon; Brocard et Grassat, sous-lieutenants du Génie; G. Coridas, à Pau.

Question 950

(voir 2^e série, t. VIII, p. 315),

PAR M. O. CALLAUDREAU.

Démontrer que le produit des deux séries

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a+2} \frac{1}{2} x + \frac{1}{a+4} \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^2 + \frac{1}{a+6} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^3 + \dots,$$

$$1 + \frac{1}{2} x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^3 + \dots$$

est

$$\frac{1}{a} \left[1 + \frac{a+1}{a+2} x + \frac{(a+1)(a+3)}{(a+2)(a+4)} x^2 + \frac{(a+1)(a+3)(a+5)}{(a+2)(a+4)(a+6)} x^3 + \dots \right].$$

(HERMITE.)

Pour résoudre cette question, je décomposerai en fractions rationnelles le coefficient du terme en x^n

$$\frac{(a+1)(a+3)\dots(a+2n-1)}{a(a+2)(a+4)\dots(a+2n)} = \frac{\varphi(a)}{\psi(a)},$$

et je démontrerai qu'il est égal au coefficient de x^n dans le produit des deux premières séries, produit obtenu algébriquement.

Pour décomposer cette fraction, je cherche ce que devient $\frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$ lorsque $a = -2m$.

Pour cette valeur de a , $\varphi(a)$ est égal à

$$(2m-1)(2m-3)(2m-5)\dots(-1)^m 1.3\dots[2(n-m)-1].$$

Pour cette même valeur de a , $\psi'(a)$ est égal à

$$(-2m)[-(2m-2)]\dots(-2)(+2)\dots[2(n-m)],$$

produit qui renferme m termes négatifs.

Donc

$$\frac{\varphi(a)}{\psi'(a)} = \frac{(2m-1)(2m-3)\dots 1.1.3\dots[2(n-m)-1]}{2m(2m-2)\dots 2.2.4.6\dots 2(n-m)}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(a)}{\psi(a)} &= \frac{1}{a} \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots 2n} + \frac{1}{a+2} \frac{1.3.5\dots[2(n-1)-1]}{2.4.6\dots 2(n-1)} \frac{1}{2} \\ &\quad + \dots + \frac{1}{a+2n} \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots 2n}. \end{aligned}$$

Or, si l'on fait algébriquement le produit des deux premières séries, on obtient précisément ce même développement pour coefficient de x^n .

Note. — La même question a été résolue aussi par M. H. Brocard, lieutenant du Génie.

Questions 981 et 1017 (*)

(voir 2^e série, t. IX, p. 92) ;

PAR M. MORET-BLANC,

Professeur au lycée du Havre.

*On coupe une surface du second degré par un plan ;
aux différents points de l'intersection, on mène les*

(*) La question 1017 (n^o de mars 1871) a été proposée en février 1870, sous le n^o 981.

normales à la surface; par un point de l'espace, on mène des droites égales et parallèles aux longueurs interceptées sur ces normales entre leurs pieds sur la surface et le plan de symétrie. Les extrémités de toutes ces droites se trouvent sur une conique.

(E. LAGUERRE.)

Je suppose d'abord que la surface ait un centre. Soient

$$(1) \quad Ax^2 + A'y'^2 + A''z^2 = H,$$

$$(2) \quad lx + my + nz + p = 0,$$

les équations de la surface et du plan.

Celles d'une normale au point (x, y, z) seront

$$(3) \quad \frac{X - x}{A} = \frac{Y - y}{A'} = \frac{Z - z}{A''},$$

et, pour $Z = 0$, on aura

$$X - x = -\frac{A}{A''}x, \quad Y - y = -\frac{A'}{A''}y.$$

Or, si de l'origine des coordonnées on mène une droite égale et parallèle à cette normale (dirigée de la surface vers le plan de symétrie $Z = 0$), $X - x$, $Y - y$ et $Z - z$ seront précisément les coordonnées de son extrémité; on aura donc, en représentant ces coordonnées par ξ , η , ζ ,

$$(4) \quad \xi = -\frac{A}{A''}x, \quad \eta = -\frac{A'}{A''}y, \quad \zeta = -z.$$

On aura le lieu de ces extrémités en éliminant x , y , z entre les équations (1), (2) et (4).

Des dernières on tire

$$x = -\frac{A''}{A}\xi, \quad y = -\frac{A''}{A'}\eta, \quad z = -\zeta.$$

En reportant ces valeurs dans (1) et (2), et mettant x ,

y, z au lieu de ξ, η, ζ , on a

$$(5) \quad \frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{A'} + \frac{z^2}{A''} = \frac{H}{A''^2}.$$

$$(6) \quad \frac{l}{A}x + \frac{m}{A'}y + \frac{n}{A''}z - \frac{p}{A''} = 0.$$

Le lieu est donc l'intersection d'une surface du second degré par un plan, et, par conséquent, une conique.

Si la surface est un parabolôïde, soit

$$(7) \quad Ay^2 + A'z^2 = 2Bx$$

son équation, celle du plan étant

$$(8) \quad lx + my + nz + p = 0;$$

les équations d'une normale seront

$$(9) \quad \frac{X-x}{-B} = \frac{Y-y}{Ay} = \frac{Z-z}{A'z}.$$

Pour $Z = 0$, on aura

$$X - x = \frac{B}{A'}, \quad Y - y = -\frac{A}{A'}y;$$

par suite,

$$(10) \quad \xi = \frac{B}{A'},$$

d'où

$$(11) \quad \begin{cases} \eta = -\frac{A}{A'}y, & \zeta = -z, \\ y = -\frac{A'}{A}\eta, & z = -\zeta. \end{cases}$$

Éliminant x, y, z entre les équations (7), (8), (11), et

mettant x, y, z au lieu de ξ, η, ζ , on a

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{B}{A'}, \\ \frac{y^2}{A} + \frac{z^2}{A'} = \frac{2B}{A'} \left(\frac{m}{l} \frac{y}{A} + \frac{n}{l} \frac{z}{A'} - \frac{p}{A'} \right). \end{array} \right.$$

Le lieu est encore l'intersection d'une surface du second degré par un plan perpendiculaire à l'axe du paraboloidé donné.

On peut remarquer que les lieux trouvés sont des sections faites dans des surfaces de même genre que les surfaces données.

Question 998

(voir 2^e série, t. IX, p. 151).

PAR M. C. LADURON.

Les points de rencontre des hauteurs des triangles isocèles formés par quatre tangentes quelconques à une circonférence et par les cordes de contact sont les sommets d'un quadrilatère homothétique à celui qui a pour sommets les milieux des cordes de contact. Le centre de similitude est le centre de la circonférence, et le rapport de similitude est 2. (H. BROCARD.)

Soient SA, SB deux tangentes au cercle de centre O; AB la corde de contact; SM et AN deux des hauteurs du triangle SAB, et H leur point de rencontre.

Le point M étant le milieu de la corde AB, la hauteur SM prolongée passe par le centre O du cercle.

La proposition énoncée se réduit donc à ceci : que la distance OH est double de OM.

Or, les triangles rectangles HAM, BAN ont deux angles

égaux chacun à chacun, d'où il résulte que l'angle AHM est égal à l'angle ABN; d'ailleurs, l'angle au centre AOM, ayant même mesure que l'angle ABN, lui est égal.

Donc $\widehat{AHM} = \widehat{AOM}$, le triangle HAO est isocèle, et $HM = MO$.

C. Q. F. D.

Remarque. — De la réduction précédente de la question, il appert que la propriété à démontrer pourrait être énoncée d'une manière plus générale, puisqu'elle est indépendante du nombre des tangentes considérées.

Note. — La même question a été résolue par M. Lez.
