

**Note relative à la courbure en un point
de rebroussement**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 10
(1871), p. 318-321

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1871_2_10__318_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1871, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**NOTE RELATIVE A LA COURBURE EN UN POINT
DE REBROUSSEMENT ;**

PAR UN ABONNÉ.

L'expression du rayon de courbure étant

$$\rho = \frac{\left(1 + \frac{dy'}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

si l'on prend pour axe des x la tangente au point considéré, cette expression devient

$$\rho = \frac{1}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Prenant en outre ce point pour origine des coordonnées, le changement de x et de y en $x + h$ et $y + k$ conduit à l'équation

$$k = \frac{h^2}{1 \cdot 2} \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 + \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_0 + \dots,$$

en désignant par $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 \dots$ ce que deviennent les dérivées pour $x = 0, y = 0$, c'est-à-dire pour les valeurs des coordonnées du point pris pour origine.

De l'équation précédente, on tire

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 = \lim \frac{2k}{h^2},$$

et, par conséquent,

$$\rho = \frac{1}{2} \lim \frac{h^2}{k}.$$

Cette formule va nous servir à résoudre la question que nous avons en vue.

Soit $u = 0$, l'équation d'une courbe présentant un point singulier. Ce point étant pris pour origine et la tangente étant prise pour axe des x , on aura, d'après un théorème connu et d'après la notation adoptée,

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{du}{dy}\right)_0 = 0;$$

et aussi

$$t = \lim \frac{h}{k} = 0.$$

Le changement de x, y en $x + h, y + k$ dans l'équation de la courbe donne

$$\begin{aligned} 0 = \frac{1}{1.2} \left[h^2 \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_0 + 2hk \left(\frac{d^2u}{dx dy}\right)_0 + k^2 \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)_0 \right] \\ + \frac{1}{1.2.3} \left[h^3 \left(\frac{d^3u}{dx^3}\right)_0 + 3h^2k \left(\frac{d^3u}{dx^2 dy}\right)_0 + 3hk^2 \left(\frac{d^3u}{dx dy^2}\right)_0 \right. \\ \left. + k^3 \left(\frac{d^3u}{dy^3}\right)_0 \right] + \dots \end{aligned}$$

Dans le cas où le point singulier est un point de rebroussement, et où la tangente en ce point est prise pour axe des x , l'équation

$$(1) \quad \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_0 + 2t \left(\frac{d^2u}{dy dx}\right)_0 + t^2 \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)_0 = 0$$

admet la racine double $t = 0$, ce qui exige que l'on ait

$$\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{d^2u}{dx dy}\right)_0 = 0.$$

Mais quand le rebroussement est de première espèce, la

valeur $t = 0$ ne satisfait pas à l'équation

$$(2) \quad \left(\frac{d^3 u}{dx^3}\right)_0 + 3t \left(\frac{d^3 u}{dx^2 dy}\right)_0 + 3t^2 \left(\frac{d^3 u}{dx dy^2}\right)_0 + t^3 \left(\frac{d^3 u}{dy^3}\right)_0 = 0.$$

et, par conséquent, $\left(\frac{d^3 u}{dx^3}\right)_0$ n'est pas nul.

D'après cela, la valeur de $\lim \frac{h^2}{k}$ sera fournie par l'équation

$$\frac{k^2}{1.2} \left(\frac{d^2 u}{dy^2}\right)_0 + \frac{h^2}{1.2.3} \left(\frac{d^3 u}{dx^3}\right)_0 = 0,$$

que l'on peut écrire

$$\frac{1}{3} \frac{h^2}{k^2} \left(\frac{d^3 u}{dx^3}\right)_0 + h \left(\frac{d^2 u}{dy^2}\right)_0 = 0,$$

et, puisque $h = 0$ à la limite, et que $\left(\frac{d^3 u}{dx^3}\right)_0$ est différent de 0, il faut que $\frac{h^2}{k} = 0$.

Donc, *en un point de rebroussement de première espèce, le rayon de courbure est nul.*

Si le rebroussement est de seconde espèce, la valeur $t = 0$ est non-seulement racine double de l'équation (1), mais elle satisfait aussi à l'équation (2), ce qui entraîne $\left(\frac{d^3 u}{dx^3}\right)_0 = 0$; et alors la valeur de $\lim \frac{h^2}{k}$ sera fournie par l'équation

$$\frac{1}{2} k^2 \left(\frac{d^2 u}{dy^2}\right)_0 + \frac{1}{1.2.3} h^2 k \left(\frac{d^3 u}{dx^2 dy}\right)_0 = 0,$$

ou bien

$$\frac{1}{3} \frac{h^2}{k} \left(\frac{d^3 u}{dx^2 dy}\right)_0 + \left(\frac{d^2 u}{dy^2}\right)_0 = 0.$$

La valeur de $\lim \frac{h^2}{k}$ tirée de cette équation ne présente rien de particulier.

Donc, *en un point de rebroussement de deuxième espèce, le rayon de courbure peut avoir une valeur quelconque.*

On vérifiera facilement les assertions relatives aux deux espèces de rebroussement, en se reportant à la courbe

$$y = \varphi(x) \pm (x - b)^{\frac{p}{q}} \psi(x)$$

qui est discutée dans tous les Traités de calcul différentiel.
