

A. DE SAINT-GERMAIN
**Étude géométrique sur une question
de licence**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 10
(1871), p. 30-36

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1871_2_10__30_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1871, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE SUR UNE QUESTION DE LICENCE;

PAR M. A. DE SAINT-GERMAIN.

Déterminer les conoïdes droits pour lesquels les rayons de courbure principaux en chaque point sont égaux et dirigés en sens contraire; exprimer la longueur de ces rayons pour les divers points d'une génératrice des conoïdes demandés.

Cette question a été résolue analytiquement dans les *Nouvelles Annales* (août 1869); je désire cependant en présenter ici une étude géométrique pour deux motifs. Le premier, c'est que l'union de la géométrie et du calcul ayant largement contribué à rendre plus simple et plus élégant l'enseignement de la géométrie analytique, il ne peut être mauvais de montrer l'application de la Géométrie à beaucoup de questions d'analyse infinitésimale. En second lieu, j'obtiens très-aisément une généralisation du problème proposé, que le calcul intégral ne semble pas donner aussi facilement, et qui peut offrir quelque intérêt, parce qu'on ne connaît pas l'intégrale générale de l'équation aux dérivées partielles des surfaces ayant en chacun de leurs points une courbure moyenne nulle.

Considérons donc un conoïde droit satisfaisant à la condition du problème, et supposons son axe vertical. En un quelconque de ses points, M , l'indicatrice, ayant les carrés de ses axes proportionnels aux courbures principales, sera une hyperbole équilatère; une des asymptotes est la génératrice qui passe en M , l'autre lui sera perpendiculaire, et par suite tangente à la trajectoire orthogonale des génératrices menée par M ; il s'agit de déterminer cette trajectoire C . Comme c'est une courbe tracée sur le conoïde et tangente à une asymptote de l'indicatrice, elle a un contact du deuxième ordre avec le plan tangent en M , et ce plan lui est osculateur; la génératrice qui passe en M , étant située dans le plan tangent, et d'ailleurs orthogonale avec C , est la normale principale de cette courbe. La courbe cherchée a de même toutes ses normales principales horizontales; les tangentes à son indicatrice sphérique étant parallèles à ces normales, l'indicatrice se réduit à un petit cercle horizontal. Les tangentes à la courbe C , étant parallèles aux rayons qui aboutissent aux divers points de l'indicatrice

sphérique, font un angle constant avec la direction de l'axe du conoïde, et notre courbe directrice C est une hélice tracée sur un cylindre vertical orthogonal aux génératrices. Comme celles-ci sont horizontales, la trace horizontale du cylindre coupe à angle droit les projections des génératrices qui concourent au pied de l'axe; cette trace est donc un cercle, la courbe C est l'hélice ordinaire, et le seul conoïde ayant en chaque point des rayons de courbure égaux et de sens contraire est l'hélicoïde gauche à plan directeur.

Je dis maintenant que c'est la seule surface ayant la propriété énoncée, non-seulement parmi les conoïdes, mais encore parmi les cylindroïdes, ou surfaces réglées ayant leurs génératrices parallèles à un plan que je supposerai horizontal. En effet, nous reconnaitrons comme précédemment qu'une trajectoire orthogonale quelconque aux génératrices de ces cylindroïdes doit être une hélice tracée sur un cylindre vertical dont la base coupe à angle droit les projections sur un plan horizontal des génératrices du cylindroïde. Soient AB, AC deux de ces projections infiniment voisines (*), H et H' deux trajectoires orthogonales des projections des génératrices. Ce sont les projections de deux hélices tracées sur le cylindroïde, en sorte que si j'appelle α et α' les angles constants que les tangentes aux hélices font avec le plan horizontal, dz la différence de niveau des génératrices projetées en AB et AC, m et m' les points de rencontre de AB avec H et H', n et n' celles de AC avec H, H', on aura

$$mn = dz \cot \alpha, \quad m'n' = dz \cot \alpha'.$$

Les courbes H, H' ayant les mêmes normales, la por-

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

tion telle que mm' de ces normales comprise entre les deux courbes est constante. Désignons par ρ le rayon de courbure Am de H , celui de H' en m' sera $\rho + mm'$, et la similitude des triangles Amn , $Am'n'$ donne, en admettant les substitutions d'infiniment petits les plus élémentaires,

$$\frac{mn}{Am} = \frac{m'n'}{Am'}, \quad \frac{dz \cot \alpha}{\rho} = \frac{dz \cot \alpha'}{\rho + mm'}.$$

La dernière égalité montre que ρ est constant; H ayant une courbure constante est un cercle; ses normales, projections des génératrices de la surface, sont concourantes, et cette surface est encore l'hélicoïde gauche.

Je dis enfin que parmi les surfaces réglées qui n'admettent pas de plan directeur, il n'en est aucune dont les courbures principales en chaque point soient égales et de sens contraire. En effet, cette propriété devrait appartenir aux hyperboloïdes osculateurs à la surface le long de ces génératrices; en chaque point de la génératrice de contact, un de ces hyperboloïdes aurait pour indicatrice une hyperbole équilatère à asymptotes rectangulaires. Or, pour l'hyperboloïde, les asymptotes de l'indicatrice en un point sont les deux génératrices qui y passent; et, sur un hyperboloïde proprement dit, comme l'est l'hyperboloïde osculateur à une surface dont trois génératrices consécutives ne sont pas parallèles à un même plan, jamais le lieu des points où les génératrices se coupent à angle droit n'est une génératrice: c'est, comme on sait, la courbe d'intersection de la surface et d'une sphère. Il n'y a donc, en définitive, aucune surface réglée, autre que l'hélicoïde gauche, présentant la propriété énoncée. On peut remarquer que les hyperboloïdes osculateurs à l'hélicoïde se réduisent à des paraboloides équilatères ayant leur sommet au point central de la génératrice de

contact; et, pour ces paraboloides, le lieu des points où les génératrices sont rectangulaires est le couple de génératrices passant au sommet.

Je n'ai pas à considérer les surfaces développables, en chaque point desquelles un rayon de courbure est toujours infini; l'autre devrait l'être également, et la surface se réduirait à un plan, cas particulier de l'hélicoïde gauche.

Reste à chercher l'expression des rayons de courbure principaux R en un point d'un hélicoïde gauche. Soient encore AB et AC deux génératrices infiniment voisines, M et N deux points de ces génératrices faisant partie d'une même ligne de courbure; ces éléments se projettent horizontalement en ab , ac , m , n . Menons dans le plan horizontal ms , ns perpendiculaires respectivement à am et an ; on peut les regarder comme les projections des normales à l'hélicoïde en M et N , normales qui, par la propriété des lignes de courbure se rencontrent dans l'espace au centre de courbure S projeté en s . En appelant α l'angle du plan horizontal avec l'hélice tracée en M sur l'hélicoïde, on aura, sauf une erreur infiniment petite, $ns = R \sin \alpha$. Soient p le point de rencontre de ms avec an , P le point correspondant sur la surface; MP est asymptote de l'indicatrice en M , et comme celle-ci est équilatère, $MP = PN$. On a évidemment

$$mp = MP \cos \alpha, \quad pn = PN.$$

Les triangles semblables amp , snp donnent

$$\frac{ns}{am} = \frac{pn}{pm}, \quad \frac{R \sin \alpha}{\rho} = \frac{PN}{PM \cos \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha};$$

d'où

$$R = \frac{\rho}{\sin \alpha \cos \alpha};$$

mais si l'on désigne par $2\pi a$ le pas de l'hélice tracée sur un cylindre de rayon ρ , on sait par les éléments que

$$\text{tang } \alpha = \frac{a}{\rho};$$

donc enfin on trouve

$$R = \frac{a^2 + \rho^2}{a}.$$

Il est aisé de construire ce rayon, et de voir qu'il est au rayon de courbure de l'hélice dans le rapport de a à ρ .

On a immédiatement l'équation de la projection des lignes de courbure. La figure précédente nous donne

$$d\omega = \frac{pm}{am} = \frac{PM \cos \alpha}{\rho} = \frac{PN}{\rho} \times \frac{\rho}{\sqrt{a^2 + \rho^2}} = \frac{pn}{\sqrt{a^2 + \rho^2}}.$$

Puis, selon qu'on prend l'un ou l'autre système de lignes de courbure, on aura $d\rho = \pm pn$; car on sait qu'on peut regarder am et ap comme égaux. L'équation différentielle des projections des lignes de courbure est

$$d\omega = \pm \frac{d\rho}{\sqrt{a^2 + \rho^2}}.$$

L'intégrale est bien connue

$$\omega = \pm l(\rho + \sqrt{a^2 + \rho^2});$$

d'où l'on tire

$$\rho = \pm \frac{a}{2} (e^\omega - e^{-\omega}).$$

Enfin le lieu des centres de courbure de l'hélicoïde pour tous les points d'une génératrice s'obtient en prenant pour axe des x la génératrice, pour axe des z l'axe du conoïde, pour axe des y une perpendiculaire aux deux autres. On aura, en considérant l'un et l'autre des cen-

tres de courbure en M,

$$x = am = \rho,$$

$$y = \pm ms = \pm R \sin \alpha = \pm \frac{a^2 + \rho^2}{a} \frac{a}{\sqrt{a^2 + \rho^2}} = \pm \sqrt{a^2 + x^2},$$

$$\text{tang } \alpha = \frac{y}{z} = \frac{a}{\rho} = \frac{a}{x}.$$

Le lieu est l'intersection du cylindre $x^2 - y^2 + a^2 = 0$ et du parabolöide $xy = az$; c'est une courbe gauche formée de deux parties séparées. Il est assez remarquable qu'on puisse la rectifier : on trouvera sans peine

$$ds = \frac{dx}{a} \sqrt{2a^2 + 4x^2}.$$

En comptant l'arc à partir de $x = 0$, cela donne

$$s = \frac{x}{2a} \sqrt{2a^2 + 4x^2} + \frac{a}{2} \ln \frac{2x + \sqrt{2a^2 + 4x^2}}{a\sqrt{2}}.$$