

AUGUSTE MOREL

**Exposé d'une théorie (géométrie
élémentaire) des sections coniques**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 10
(1871), p. 305-317

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1871_2_10__305_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1871, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

EXPOSÉ D'UNE THÉORIE (GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE)
DES SECTIONS CONIQUES

(suite, voir 2^e série, t. X, p. 269),

PAR M. AUGUSTE MOREL,

Ancien Élève de l'École Polytechnique, répétiteur à Sainte-Barbe.

CHAPITRE II. — DE L'HYPERBOLE.

40. L'hyperbole est une courbe telle, que la différence $MF' - MF$ des distances de l'un quelconque de ses points, M , à deux points fixes F, F' soit constante et égale à une quantité que j'appellerai $2a$. Les points F et F' sont appelés les *foyers*, et je désignerai leur distance par $2c$. Le rapport $\frac{c}{a}$ s'appelle l'*excentricité* de la courbe.

41. Construction de la courbe par points.

42. Construction de la courbe d'un mouvement continu.

43. *Théorème.* — L'hyperbole a pour centre de symétrie le point O milieu de FF' , et pour axes de symétrie la droite FF' et sa perpendiculaire passant par le point O .

Observation. — La courbe ne rencontre pas le second axe de symétrie, qui prend le nom d'*axe non transverse* ou *axe imaginaire*, tandis que l'axe FF' s'appelle *axe transverse*.

44. *Théorème.* — Suivant qu'un point est ou n'est pas situé entre les deux branches de la courbe, la différence des rayons vecteurs est plus petite ou plus grande que $2a$.

45. *Théorème.* — Si d'un point M d'une hyperbole on mène la perpendiculaire MP sur l'axe focal, la somme des rayons vecteurs du point M est proportionnelle à la distance OP de cette droite au centre.

Démonstration identique à celle de l'ellipse.

46. *Théorème.* — Du point F je mène une tangente FC au cercle décrit sur l'axe transverse AA' comme diamètre; la perpendiculaire CS à AA' coupe cette ligne en un point S tel, que l'on a $OS \times OF = \overline{OA}^2$. Si d'un point P pris sur la courbe j'abaisse la perpendiculaire PM sur AA' et que je mène MN parallèle à OC jusqu'au point de rencontre avec la droite CS, on aura $MN = FP$.

Je démontrerais, comme pour l'ellipse, que, si je prolonge la droite MN jusqu'au point N' où elle rencontre la parallèle à CS menée par le point S' symétrique de S par rapport au centre, on a

$$MN' - MN = F'P - FP$$

et

$$MN' + MN = F'P + FP.$$

47. *Corollaire.* — Si du point P j'abaisse une perpendiculaire PR sur la ligne CS, je démontrerai, comme pour l'ellipse, que le rapport des distances d'un point P de la courbe au point F et à la droite CS est constant et égal à l'excentricité de la courbe.

La droite CS s'appelle la *directrice* correspondant au foyer F. Il y a une seconde directrice correspondant au foyer F' et passant par le point S', et pour laquelle le rapport $\frac{PF}{PR'}$ est encore égal à $\frac{c}{a}$.

48. *Théorème.* — Si par le pied P de l'ordonnée d'un point T de l'hyperbole je mène une tangente au cercle décrit sur l'axe transverse comme diamètre, le rapport de l'ordonnée TP à la tangente PM est constant

Pour le prouver, je mène par le foyer F une perpendiculaire à l'axe transverse. Cette perpendiculaire rencontre en R le rayon OM passant par le point de contact, et l'on prouve facilement que $MR = FT$, et que, par suite, on a

$$\overline{TP}^2 = \overline{PM}^2 \left(\frac{c^2}{a^2} - 1 \right),$$

ou, en posant $c^2 - a^2 = b^2$,

$$\frac{TP}{PM} = \frac{b}{a}.$$

49. *Corollaire.* — Il résulte de là que l'ordonnée d'un point de l'hyperbole détermine sur l'axe transverse deux segments soustractifs tels, que le rapport du carré de l'ordonnée au produit de ces deux segments est constant et égal à $\frac{b^2}{a^2}$.

50. *Théorème.* — La tangente à l'hyperbole bissecte l'angle des rayons vecteurs passant au point de contact.

51. *Corollaire I.* — La tangente n'a qu'un point commun avec l'hyperbole.

Corollaire II. — La normale est également inclinée sur les rayons vecteurs du pied de cette normale. Il en résulte que, si nous supposons des rayons calorifiques ou lumineux partis du point F, ils se réfléchiront en venant rencontrer la courbe, de manière que leur direction passera toujours par le point F'. C'est de là que vient le nom de *foyers*, donné aux points F, F'.

52. *Théorème.* — Le lieu des points symétriques du foyer F par rapport aux tangentes à l'hyperbole est un cercle décrit du point F' comme centre avec l'axe transverse pour rayon.

Ce cercle s'appelle le *cercle directeur* relatif au foyer F'.

On verrait facilement qu'il existe un second cercle directeur relatif au foyer F , et qui est le lieu des points symétriques du foyer F' par rapport aux tangentes.

53. *Corollaire I.* — L'hyperbole est le lieu des points également distants d'un cercle et d'un point pris à l'extérieur du cercle.

Corollaire II. — On voit, en outre, que, si l'on joint le point F à un point quelconque H du cercle directeur relatif au foyer F' , et que l'on mène par le milieu S de FH une perpendiculaire à cette ligne FH , cette perpendiculaire est une tangente dont le point de contact est au point N où elle rencontre le rayon $F'H$ prolongé. Mais, lorsque la ligne FH se rapproche de la tangente menée du point F au cercle directeur, le point N s'éloigne de plus en plus, et lorsque FH est tangente au cercle directeur, le point N est à l'infini. La courbe a donc des branches infinies, et la ligne SN , dans cette position limite, est dite une *asymptote* de la courbe. De plus, les lignes SN et $F'H$ étant alors parallèles, la ligne SN passe par le milieu de FF' , ou par le centre. Donc l'asymptote à l'hyperbole est la perpendiculaire menée du centre à la tangente au cercle directeur F' menée par l'autre foyer. Comme du point F on peut mener deux tangentes au cercle directeur F' , il en résulte que la courbe a deux asymptotes.

On pourrait aussi mener du point F' deux tangentes au cercle directeur F ; mais il est facile de voir que ces tangentes sont parallèles aux précédentes, et que, par suite, les asymptotes sont confondues. Il y a donc deux asymptotes seulement.

54. *Théorème.* — Le lieu géométrique des projections d'un foyer sur les tangentes est le cercle décrit sur l'axe transverse comme diamètre.

55. *Corollaire.* — Si OS est l'asymptote, FS est per-

pendiculaire à l'extrémité du rayon et par suite tangente au cercle AA' . Donc, si du point F on mène des tangentes au cercle décrit sur AA' comme diamètre, les rayons passant aux points de contact ne sont autres que les asymptotes ; la corde de contact est la directrice correspondant au foyer F , et par suite le théorème n° 46 peut s'énoncer de la manière suivante :

Le rayon vecteur d'un point P de l'hyperbole est égal à la distance de ce point à la directrice comptée parallèlement à l'asymptote.

56. *Problème.* — Mener une tangente à l'hyperbole par un point pris sur la courbe.

57. *Problème.* — Mener une tangente à l'hyperbole par un point pris en dehors de la courbe.

58. *Corollaire.* — Le lieu géométrique des points d'où l'on peut mener deux tangentes rectangulaires est un cercle dont le centre est au point O , et dont le rayon est $\sqrt{a^2 - b^2}$. Pour que ce rayon soit réel, il faut que l'on ait $b < a$. Si $b = a$, le lieu se réduit à un point qui est le centre, et les seules tangentes que l'on puisse mener par ce point sont les asymptotes qui sont ici rectangulaires.

59. *Théorème.* — Si l'on mène d'un point M deux tangentes à l'hyperbole, et que l'on joigne le point M aux deux foyers F et F' :

1° Les deux angles $F'MT'$ et FMT sont égaux ;

2° Chacune des lignes FM et $F'M$ est la bissectrice de l'angle des rayons vecteurs allant aux points de contact et menés d'un même foyer, ou la bissectrice du supplément de cet angle, suivant que les points de contact appartiennent à la même branche, ou à des branches différentes.

60. *Problème.* — Mener à l'hyperbole une tangente parallèle à une direction donnée.

61. *Corollaire.* — Les points de contact de deux tangentes parallèles sont symétriques par rapport au centre, et réciproquement, les tangentes en des points symétriques, par rapport au centre, sont parallèles.

62. *Théorème.* — Le produit des distances des deux foyers à une tangente est constant et égal au carré de la moitié de l'axe non transverse.

63. *Théorème.* — Si une droite rencontre l'hyperbole aux points M et N et la directrice correspondante au foyer F, en P; si l'on joint le point F aux trois points M, N, P, la ligne FP est la bissectrice de l'angle des rayons vecteurs.

Démonstration identique à celle de l'ellipse.

64. *Corollaire I.* — Une droite ne peut rencontrer une hyperbole en plus de deux points.

Corollaire II. — La tangente étant la limite de la position d'une sécante dont les deux points d'intersection situés sur une même branche se sont rapprochés indéfiniment, la ligne qui joint le foyer aux points de rencontre de la directrice et de la tangente est perpendiculaire sur le rayon vecteur du point de contact.

Corollaire III. — Si les rayons vecteurs qui passent par les points de contact de deux tangentes sont en ligne droite, les tangentes se coupent sur la directrice, et inversement.

Corollaire IV. — Les tangentes aux sommets sont perpendiculaires à l'axe.

Corollaire V. — Une parallèle à l'asymptote ne coupe la courbe qu'en un point.

65. *Problème.* — Déterminer les points de rencontre

d'une droite et d'une hyperbole donnée par ses foyers et son axe transverse.

66. *Définition.* — Étant donnés deux cercles O et O' , si l'on mène deux rayons parallèles et de même sens, la ligne qui joint leurs extrémités rencontre la ligne des centres en un point fixe que l'on appelle *centre de similitude directe*. Si l'on joint les extrémités de deux rayons parallèles et de sens contraires, le point de rencontre avec la ligne des centres est fixe et s'appelle le *centre de similitude inverse*. Ces points sont ceux où les tangentes communes aux cercles rencontrent la ligne des centres. Les tangentes extérieures passent par le centre de similitude directe, et les tangentes intérieures passent par le centre de similitude inverse.

67. *Théorème.* — Lorsqu'une droite rencontre une hyperbole aux points M et N et la directrice en P , le point P est un centre de similitude des cercles ayant M et N pour centres et passant par le foyer F , correspondant à la directrice.

Démonstration identique à celle donnée pour l'ellipse.

68. *Corollaire I.* — Si la droite donnée passe par le centre, le point P est un centre de similitude commun aux deux cercles précédents et au cercle décrit sur l'axe transverse comme diamètre.

Corollaire II. — Si le point P est un centre de similitude directe, c'est-à-dire si les deux points de rencontre sont sur la même branche, on peut mener une tangente commune par ce point aux deux cercles. Lorsque la ligne MN se déplace parallèlement à elle-même, la tangente reste aussi parallèle à elle-même. En particulier, si par le centre on mène une parallèle à MN , cette parallèle ne rencontre pas la courbe. Mais la tangente menée par le point P_1 , où elle rencontre la directrice au cercle

dont le diamètre est AA' , est parallèle à cette tangente commune.

69. *Théorème.* — Le lieu géométrique du point milieu d'une corde de direction donnée, est une droite que l'on obtient en joignant le centre au point de rencontre de la directrice et de la perpendiculaire à la droite donnée, menée par le point F .

Nous supposerons, pour faire la démonstration, que les points M et N soient sur la même branche, ce qui ne changera rien à la généralité du théorème, et nous démontrerons, comme pour l'ellipse, en appelant C le point de rencontre de la directrice et de la perpendiculaire passant par le foyer, et m le milieu de la corde, que les trois points O , C , m sont sur une même droite.

70. *Corollaire.* — Si par le centre je mène la droite OP' parallèle à la droite donnée et coupant en P' la directrice, les points P' et C sont situés du même côté de l'axe transverse.

71. *Théorème.* — Si je prolonge la corde jusqu'aux deux points où elle coupe les asymptotes, le lieu du milieu est la même ligne OC .

On le démontre facilement en menant par le point C une parallèle à MN , jusqu'aux points où elle rencontre les asymptotes, et l'on voit facilement que le point C est le milieu de cette ligne.

72. *Corollaire I.* — Les portions d'une corde comprises entre la courbe et ses asymptotes sont égales.

Corollaire II. — La portion de la tangente comprise entre les deux asymptotes est divisée en deux parties égales par le point de contact.

Corollaire III. — Nous voyons que, au lieu de chercher le lieu du milieu des cordes parallèles à une direc-

tion donnée, nous pouvons chercher le lieu des milieux des droites de même direction comprises entre les asymptotes. Donc le théorème 69 est général.

73. *Théorème.* — Lorsque, après avoir trouvé le diamètre OC correspondant à une direction OP', nous cherchons le diamètre correspondant à la direction OC, nous retrouvons la droite OP'.

Démonstration semblable à celle de l'ellipse.

74. *Définition.* — On appelle *hyperboles conjuguées* deux hyperboles ayant même centre, même distance focale et mêmes asymptotes, mais qui ne sont pas situées dans les mêmes angles de ces asymptotes. Si l'une de ces courbes a pour axe transverse AA', l'autre aura pour longueur d'axe transverse le double de la tangente menée du point F au cercle décrit sur AA' comme diamètre.

Deux hyperboles conjuguées ne sont pas en général superposables : il faudrait pour cela que l'angle des asymptotes fût droit. Dans ce cas, l'hyperbole est dite *équilatère*, ou quelquefois *rectangulaire*.

75. Une hyperbole ayant les mêmes systèmes de diamètres conjugués que ses asymptotes, il en résulte que deux hyperboles conjuguées ont les mêmes systèmes de diamètres conjugués. On peut, du reste, prouver ce fait directement en montrant que si l'on effectue pour deux hyperboles conjuguées la construction relative aux diamètres correspondant à une direction donnée, les deux points de rencontre des directrices et des droites passant par les foyers sont en ligne droite avec le centre commun.

Puisque deux diamètres conjugués de l'hyperbole sont situés dans des angles adjacents des asymptotes, il en résulte que l'un d'eux rencontre l'une des courbes, et l'autre la courbe conjuguée. Nous appellerons *longueur d'un*

demi-diamètre, la distance du centre au point où il coupe la courbe, et nous prendrons pour la longueur de son conjugué la distance du centre au point où il rencontre la courbe conjuguée.

76. Nous avons vu que, dans une hyperbole dont l'axe transverse est $2a$ et l'axe non transverse $2b$, le rapport entre l'ordonnée et la tangente menée du pied de cette ordonnée au cercle décrit sur l'axe transverse comme diamètre est égal à $\frac{b}{a}$. Si les deux axes sont égaux, auquel cas l'hyperbole est équilatère, ce rapport est égal à l'unité. Par suite, si nous supposons une hyperbole équilatère de mêmes sommets qu'une hyperbole donnée, nous voyons que le rapport entre les ordonnées correspondantes des deux courbes est égal à $\frac{b}{a}$, propriété analogué à une propriété déjà indiquée dans l'ellipse.

Dans une hyperbole équilatère, les diamètres conjugués sont également inclinés sur l'asymptote. Pour le prouver, on remarque que, dans deux hyperboles conjuguées quelconques, les axes et deux diamètres conjugués interceptent sur les directrices des longueurs égales, et l'on en déduit facilement la propriété énoncée. Il est facile, en outre, de voir que ces diamètres sont égaux.

77. On dit que deux courbes sont *homothétiques* lorsque l'on peut trouver un point o tel que si l'on mène par ce point une droite quelconque, qui rencontre en a et en a' les deux courbes, l'on ait $\frac{oa}{oa'} = \text{const.}$ Dans ce cas, les tangentes aux points a et a' sont parallèles, et réciproquement si deux courbes sont telles que, pour deux points correspondants a et a' situés sur une même droite, passant par un point fixe o , les tangentes soient parallèles,

les deux courbes sont homothétiques, et le rapport $\frac{oa}{oa'}$ est constant.

Il résulte de là que deux hyperboles qui ont même centre et mêmes asymptotes sont homothétiques.

78. *Théorème.* — Si l'on projette un diamètre réel d'une hyperbole sur son axe transverse $2a$, et le diamètre conjugué sur l'axe non transverse $2b$, le rapport de la projection du premier diamètre à la projection du second est constant et égal à $\frac{a}{b}$.

En effet, prenons une hyperbole équilatère ayant mêmes sommets que l'hyperbole donnée, et prenons le diamètre correspondant au diamètre a' . Soient a' , ce diamètre et b' , son conjugué. Les longueurs a' , et b' , seront égales. Si dans l'angle adjacent des asymptotes de cette hyperbole équilatère, nous prenons une seconde hyperbole équilatère dont l'axe transverse soit $2b$, le diamètre de même direction que b' , aura pour longueur $b' \times \frac{b}{a}$, et ce diamètre aura même projection que le diamètre b' de l'hyperbole proposée. Donc, en appelant α et β les deux projections, on aura $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{a}{b}$.

79. *Corollaire I.* — Si je projette le demi-diamètre b' sur l'axe transverse, sa projection est égale à la longueur de la tangente menée du point de projection de l'extrémité du diamètre a' au cercle décrit sur AA' comme diamètre.

Corollaire II. — Il en résulte aussi que la différence des carrés des projections de deux diamètres conjugués sur un axe est constante et égale au carré de cet axe.

80. *Théorème.* — La différence des carrés de deux

diamètres conjugués est constante et égale à la différence des carrés des axes.

Ce théorème est une conséquence immédiate des deux corollaires précédents.

81. Théorème. — La portion de la tangente comprise entre le point de contact et une asymptote est égale au demi-diamètre parallèle.

Pour le prouver, on remarque que le point où la parallèle à l'asymptote menée par le point de contact coupe l'axe transverse est la projection du point de rencontre de la tangente et de l'autre asymptote, et l'on en déduit facilement que la tangente et le demi-diamètre parallèle ont même projection sur l'axe transverse.

82. Corollaire. — Si sur deux diamètres conjugués de l'hyperbole on construit un parallélogramme, ses sommets sont sur les asymptotes.

83. Théorème. — Si par un point M de l'hyperbole on mène une perpendiculaire à l'axe focal, perpendiculaire qui coupe en N et N' les asymptotes, le produit $MN \times MN'$ est constant et égal à b^2 .

Ce théorème se démontre facilement en remarquant que le produit considéré est égal à la différence des carrés des ordonnées de la courbe et de son asymptote.

84. Problème. — Trouver les axes d'une hyperbole dont on connaît les asymptotes et un point.

On peut toujours ramener ce problème à celui de la construction d'une hyperbole dont on connaît deux diamètres conjugués.

Les axes ont pour directions les bissectrices des angles des asymptotes, et l'on obtiendra facilement l'axe non transverse, en s'appuyant sur le théorème précédent.

85. Théorème. — Si d'un point M de l'hyperbole on

mène des parallèles MN, MP aux asymptotes jusqu'aux points N, P, où chacune d'elles coupe l'asymptote, le produit $MN \times MP$ est constant.

Pour le prouver, je mène par le point M la perpendiculaire à l'axe transverse jusqu'aux points de rencontre avec les asymptotes. Les triangles isocèles que l'on forme ainsi permettent de démontrer le théorème.

Le produit considéré a pour valeur $\frac{a^2 + b^2}{4}$.

86. *Théorème.* — Le parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués a une aire constante.

Pour le prouver, il suffit de montrer que le triangle formé par une tangente et les deux asymptotes a une aire constante, ou bien que si l'on mène par le point de contact des parallèles aux asymptotes, ces parallèles et les asymptotes forment un parallélogramme de surface constante, ce qui résulte évidemment du théorème précédent.

87. *Théorème.* — Si par un point M de l'hyperbole on mène une corde parallèle à un diamètre $2b'$ et coupant en Q et R les asymptotes, le produit $QM \times RM$ est égal au carré du demi-diamètre b' .

Pour le prouver, je considère le point M' où le diamètre conjugué de la direction donnée coupe la courbe, et par ce point je mène les parallèles M'N', M'P' aux asymptotes, et la ligne N'P' qui est, comme il est facile de le voir, égale et parallèle au demi-diamètre b' .

La considération des triangles QNM, N'M'P' d'une part, et des triangles MPR et N'M'P' d'autre part, permet d'en déduire la démonstration du théorème.

(La suite prochainement.)