

ADOLPHE STEEN

**Démonstration élémentaire de la
formule de Simpson**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 10
(1871), p. 301-304

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1871_2_10__301_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1871, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE DE LA FORMULE DE SIMPSON;

PAR M. ADOLPHE STEEN.

Une ligne courbe quelconque forme avec sa corde un segment dont l'aire A peut se déterminer comme il suit, avec une approximation suffisante, lorsque la concavité de la courbe ne change pas de sens dans l'étendue de l'arc considéré. Menons une tangente parallèle à la corde et deux lignes parallèles par ses extrémités, de manière à former un parallélogramme d'aire P , dans lequel le segment est inscrit. En traçant de nouvelles cordes du point de contact aux extrémités de la corde donnée, on détache une aire triangulaire $\frac{1}{2}P$, moindre que l'aire du segment. On a ainsi

$$P > A > \frac{1}{2}P.$$

Mais les deux dernières cordes tracées déterminent de

nouveaux segments B_1, B_2 , dont chacun se trouve dans la même relation avec l'un des deux parallélogrammes correspondants Q_1, Q_2 , de sorte qu'on a

$$Q_1 > B_1 > \frac{1}{2} Q_1, \quad Q_2 > B_2 > \frac{1}{2} Q_2.$$

Comme on a maintenant

$$A = \frac{1}{2} P + B_1 + B_2,$$

il vient

$$\frac{1}{2} P + Q_1 + Q_2 > A > \frac{1}{2} P + \frac{1}{2} (Q_1 + Q_2).$$

Chacune de ces limites peut donc être prise pour A , avec une erreur moindre que $\frac{1}{2} (Q_1 + Q_2)$.

En traitant les deux segments B_1, B_2 comme on a traité le segment A , on en détachera quatre nouveaux segments C_1, C_2, C_3, C_4 , qui ont pour limites supérieures respectives les parallélogrammes R correspondants, et pour limites inférieures les moitiés de ces parallélogrammes. On trouve par suite, pour

$$A = \frac{1}{2} P + \frac{1}{2} (Q_1 + Q_2) + C_1 + C_2 + C_3 + C_4,$$

la limite supérieure

$$\frac{1}{2} P + \frac{1}{2} (Q_1 + Q_2) + R_1 + R_2 + R_3 + R_4,$$

et la limite inférieure

$$\frac{1}{2} P + \frac{1}{2} (Q_1 + Q_2) + \frac{1}{2} (R_1 + R_2 + R_3 + R_4),$$

avec une limite d'erreur

$$\frac{1}{2} (R_1 + R_2 + R_3 + R_4).$$

Et ainsi de suite.

Si l'on applique cette considération à un segment dont l'arc soit très-petit, ou ait une faible courbure, on pourra, avec une approximation suffisante, admettre que toutes les lignes de jonction des points de contact avec les mi-

lieux des cordes correspondantes, sont parallèles entre elles, et aux côtés des parallélogrammes menés par les extrémités des cordes (relation qui a lieu exactement dans la parabole). On aura de cette manière

$$Q_1 = Q_2, \quad R_1 = R_2 = R_3 = R_4, \dots$$

Il vient, par conséquent,

$$A > \frac{1}{2}(P + 2Q + 4R + \dots + 2^{n-1}V),$$

si la construction indiquée est répétée n fois. On voit en même temps que la hauteur de Q est la moitié de celle de P , la hauteur de R la moitié de celle de Q , etc. En admettant, de plus, que les bases, dans chaque système de parallélogrammes, sont les moitiés des bases du système précédent (ce qui a rigoureusement lieu dans la parabole), on trouve

$$Q = \frac{1}{2}P, \quad R = \frac{1}{4}Q = \frac{1}{8}P, \dots, \quad V = \frac{1}{2^{n-1}}P.$$

Introduisant ces valeurs dans la limite de A , on a

$$A > \frac{1}{2}P \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^{n-1}} \right),$$

avec une erreur $< \frac{1}{2 \cdot 4^{n-1}}P$.

Pour $n = \infty$, on a

$$A = \frac{2}{3}P,$$

ce qui est vrai approximativement pour tous les segments dont les arcs ont leur concavité de sens constant, et qui sont très-petits ou très-peu courbes. Le résultat trouvé a lieu exactement pour la parabole (*).

(*) Cette méthode coïncide entièrement avec la première méthode d'exhaustion des anciens, et peut s'appliquer à une courbe quelconque. (Voy. DUCHAMEL, *Calcul infinitésimal*, t. I.)

C'est là-dessus qu'est fondée la formule de Simpson pour la mesure d'une aire A , limitée par l'arc $M_0 M_{2n}$, la ligne droite $A_0 A_{2n}$ et les ordonnées $A_0 M_0$, $A_{2n} M_{2n}$, perpendiculaires sur $A_0 A_{2n}$. On partage $A_0 A_{2n}$ en $2n$ parties, égales chacune à h , et aux points de division A_1 , A_2, \dots, A_{2n-1} , on élève les ordonnées $A_1 M_1, A_2 M_2, \dots, A_{2n-1} M_{2n-1}$. On peut maintenant calculer chacune des aires $A_0 M_0 M_1 M_2 A_2, A_2 M_2 M_3 M_4 A_4, \dots$, comme sommes d'un trapèze $A_0 M_0 M_2 A_2, \dots$ et d'un segment $M_0 M_1 M_2, \dots$. En désignant par $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{2n}$ la série des ordonnées, on a

$$\text{trapèze} \dots \quad A_0 M_0 M_2 A_2 = h (a_0 + a_2),$$

$$\text{segment} \dots \quad M_0 M_1 M_2 = \frac{2}{3} 2h \left(a_1 - \frac{a_0 + a_2}{2} \right),$$

le parallélogramme circonscrit au segment ayant pour hauteur $2h$, et pour base la différence entre a_1 et la médiane du trapèze. On trouve par suite

$$A_0 M_0 M_1 M_2 A_2 = \frac{1}{3} h (a_0 + 4a_1 + a_2),$$

et de même pour les suivants

$$\frac{1}{3} h (a_2 + 4a_3 + a_4),$$

.

$$\text{jusqu'à} \quad \frac{1}{3} h (a_{2n-2} + 4a_{2n-1} + a_{2n}),$$

dont la somme est (formule de Simpson)

$$A = \frac{1}{3} h (a_0 + 4a_1 + 2a_2 + 4a_3 + \dots + 2a_{2n-2} + 4a_{2n-1} + a_{2n}).$$

On voit, en outre, que cette formule serait rigoureusement exacte, si les arcs appartenait à des paraboles ayant leurs axes perpendiculaires à $A_0 A_{2n}$.