

Solutions des questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 10
(1871), p. 282-284

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1871_2_10__282_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1871, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*

<http://www.numdam.org/>

**SOLUTIONS DES QUESTIONS PROPOSÉES
DANS LES NOUVELLES ANNALES.**

Question 872

(voir 2^e série, t. VII, p. 237.)

PAR M. WILLIÈRE,

Professeur à Arlon.

Deux droites qui divisent harmoniquement les trois diagonales d'un quadrilatère rencontrent en quatre points harmoniques toute conique inscrite dans le quadrilatère. (CREMONA.)

Je rapporte la figure au triangle formé par les trois diagonales du quadrilatère ; les équations des quatre côtés sont dans ce cas :

$$x + y + z = 0,$$

$$x + y - z = 0,$$

$$x - y + z = 0,$$

$$x - y - z = 0$$

Soient

$$lx + my + nz = 0,$$

$$l'x + m'y + n'z = 0$$

les équations de deux droites quelconques; les points où ces droites coupent la diagonale x sont déterminés par l'équation

$$mm'y^2 + (mn' + nm')zy + nn'z^2 = 0,$$

et les sommets du quadrilatère situés sur la même diagonale, par l'équation

$$y^2 - z^2 = 0.$$

Pour que ces quatre points soient harmoniquement conjugués, il faut que l'on ait

$$mm' = nn'.$$

De même, pour que les deux autres diagonales soient divisées harmoniquement, il faut que l'on ait

$$\begin{aligned} nn' &= ll' \\ ll' &= mm'; \end{aligned}$$

d'où je conclus que les équations de deux droites qui divisent harmoniquement les diagonales du quadrilatère sont de la forme

$$(1) \quad lx + my + nz = 0,$$

$$(2) \quad \frac{x}{l} + \frac{y}{m} + \frac{z}{n} = 0.$$

Une conique quelconque, inscrite dans le quadrilatère, a pour équation

$$(3) \quad \mu^2 x^2 - \mu(x^2 + y^2 - z^2) + y^2 = 0.$$

Par suite, l'équation des deux lignes joignant un point (x', y', z') de cette conique aux points d'intersection de la droite (1) avec la même conique sera

$$\begin{aligned} &(lx' + my' + nz')[\mu^2 x^2 - \mu(x^2 + y^2 - z^2) + y^2] \\ &= 2(lx + my + nz)[\mu^2 xx' - \mu(lx' + yy' - zz') + yy']. \end{aligned}$$

Ces deux droites coupent la diagonale $z = 0$ en deux points déterminés par l'équation

$$\begin{aligned} & \mu x^2 (m y' + n z' - l x') \\ & - 2xy (\mu m x' - l y') - y^2 (l x' - m y' + n z') = 0. \end{aligned}$$

En opérant de la même manière pour la droite (2), on trouverait deux points correspondants déterminés par l'équation

$$\mu x^2 \left(\frac{y'}{m} + \frac{z'}{n} - \frac{x'}{l} \right) - 2xy \left(\mu \frac{x'}{m} - \frac{y'}{l} \right) - y^2 \left(\frac{x'}{l} - \frac{y'}{m} + \frac{z'}{n} \right) = 0.$$

Ces quatre points seront harmoniques si l'on a

$$\begin{aligned} & \mu \left(\frac{y'}{m} + \frac{z'}{n} - \frac{x'}{l} \right) (l x' - m y' + n z') \\ & + \mu (m y' + n z' - l x') \left(\frac{x'}{l} - \frac{y'}{m} + \frac{z'}{n} \right) \\ & + 2 (\mu m x' - l y') \left(\mu \frac{x'}{m} - \frac{y'}{l} \right) = 0, \end{aligned}$$

ou bien, toute réduction faite,

$$\mu^2 x'^2 - \mu (x'^2 + y'^2 - z'^2) + y'^2 = 0,$$

ce qui est une identité, puisque le point (x', y', z') est situé sur la conique (3).
