NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

LOUIS SALTEL

Application d'un théorème sur les surfaces de second ordre à la solution de la question 926

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 10 (1871), p. 278-282

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1871_2_10__278_1>

APPLICATION D'UN THÉORÈME SUR LES SURFACES DE SECOND ORDRE A LA SOLUTION DE LA QUESTION 926;

PAR M. LOUIS SALTEL,

Élève du lycée de Lille, ancien élève du lycée Louis-le-Grand.

(a) La question (926) est un cas particulier de ce problème plus général :

Étant données deux équations du second degré à trois variables,

$$f(x, y, z) = 0, \quad \varphi(x, y, z) = 0,$$

trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que ces équations représentent un cercle; déterminer la direction de son plan, son centre, la longueur de son rayon.

(b) *Détermination des conditions et de la direction du plan.* — Je m'appuierai sur la proposition réciproque suivante, qui, je crois, n'a pas encore été remarquée. On sait que :

Lorsque deux surfaces du second ordre se coupent suivant des courbes planes, toute section parallèle au plan de l'une de ces courbes donne des sections homothétiques.

Le théorème réciproque est vrai :

Si deux surfaces du second ordre se coupent suivant deux courbes planes situées à distance finie, et qu'elles admettent une même série de sections homothétiques, leur plan est en général parallèle à l'un de ceux de l'intersection.

Soient (S_1, S_2) les deux surfaces, (A_1, A_2) les plans des courbes communes, et D la direction de la série des sections planes.

Dans le cas où D serait parallèle à l'un des plans (A_1, A_2), le théorème est démontré; dans le cas contraire, D coupe (A_1, A_2) suivant deux droites situées à *distance finie*, et conséquemment la courbe totale d'intersection *généralement* suivant quatre points situés aussi à distance finie.

D'un autre côté, les mêmes sections planes, étant homothétiques, ont deux points communs à l'*infini*.

Par suite, les deux coniques que donne le plan D par son intersection avec les deux surfaces coïncident, comme ayant six points communs. Ainsi, chaque position oblique de D couperait (S_1, S_2) suivant une même courbe, et les deux surfaces se confondraient, ce qui n'est pas.

Remarque. — Le raisonnement précédent est en défaut si les sections homothétiques sont des hyperboles dont les asymptotes sont respectivement parallèles aux traces que donne leur plan avec ceux des courbes communes. Cette circonstance ne saurait se présenter dans le cas où les courbes sont des ellipses. On peut donc en toute rigueur énoncer le *corollaire* suivant :

THÉORÈME. — *Si deux surfaces du second ordre se coupent suivant deux courbes planes situées à distance finie et qu'elles admettent une même série de sections circulaires, l'une des courbes d'intersection est un cercle.*

Il résulte de ce théorème que les conditions nécessaires et suffisantes pour que deux surfaces du second ordre se coupent suivant un cercle sont :

1° *De se couper suivant des courbes planes ;*

2° *D'admettre une direction commune de sections circulaires.*

Le problème est ainsi ramené à deux autres complétement distincts et d'ailleurs résolus dans le *Cours de Mathématiques spéciales.*

Nous allons rappeler succinctement leurs solutions.

S'agit-il de trouver les *conditions* pour que les deux surfaces se coupent suivant des courbes planes ?

On forme l'équation générale des surfaces du même ordre qui passent par leur intersection ; on exprime qu'elle possède un axe central situé sur sa surface, et l'on obtient trois relations qui, par l'élimination d'un paramètre arbitraire, conduisent définitivement à *deux équations de condition.*

Veut-on exprimer que les deux surfaces ont une direction commune de sections circulaires?

On considère les équations

$$(1)\quad \begin{cases} (A - S_1)x^2 + (A' - S_1)y^2 + (A'' - S_1)z^2 \\ \qquad + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy = 0, \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} (a - S_2)x^2 + (a' - S_2)y^2 + (A'' - S_2)z^2 \\ \qquad + 2byz + 2b'zx + 2b''xy = 0, \end{cases}$$

qui représenteront les directions des sections circnlaires, si (S_1, S_2) vérifient les relations

$$(3)\quad \begin{cases} (A - S_1)(A' - S_1)(A'' - S_1) - (A - S_1)B^2 - (A' - S_1)B'^2 \\ \qquad - (A'' - S_1)B''^2 + 2BB'B'' = 0, \end{cases}$$

$$(4)\quad \begin{cases} (a - S_2)(a' - S_2)(a'' - S_2) - (A - S_1)b^2 - (a' - S_2)b'^2 \\ \qquad (a'' - S_1)b''^2 + 2bb'b'' = 0. \end{cases}$$

On exprime qu'elles ont une solution commune de la forme

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0,$$

ce qui exige deux conditions,

$$(5) \qquad f(S_1, S_2) = 0,$$

$$(6) \qquad \varphi(S_1, S_2) = 0,$$

et l'élimination de S_1 et S_2 entre les équations (3), (4), (5), (6) fournira les *deux équations de condition* que doivent vérifier les coefficients pour que la propriété demandée ait lieu.

(*c*) *Détermination du centre et du rayon.* — Le centre est évidemment donné par l'intersection des deux diamètres correspondant à la direction commune des sections circulaires. Quant au rayon, il est encore facile à obtenir. Supposez le cas où la direction du plan des sections communes passe par le centre du cercle; projetez la section sur l'un des plans coordonnés, le grand axe de la courbe projection sera égal au rayon.

(*d*) *Remarque.* — La théorie précédente suppose essentiellement que les deux surfaces se coupent suivant *deux* courbes planes situées à distance *finie;* si donc nous ne voulons rien négliger, il nous reste à examiner le cas où l'une des courbes se transporte à l'infini.

Le problème est des plus faciles. En effet, les deux surfaces sont nécessairement homothétiques, et une simple soustraction donne l'équation du plan de la courbe commune.

Or, pour que cette courbe soit un cercle, il faut et il suffit que son plan ait une direction de sections circulaires de l'une des surfaces, ce qui s'exprime immédiatement par *deux équations de condition.*

(*e*) *Applications.* — M. Dupain propose comme application numérique les deux équations

$$25y^2 + 24zy + 153z^2 - 76y + 258z - 695 = 0,$$

$$25x^2 + 72xz + 160z^2 + 22x + 248z - 1487 = 0.$$

On reconnaît, en calculant les grands axes de ces ellipses, qu'ils sont différents; donc ces équations ne sauraient représenter un cercle.

Note. — La même question a été résolue par M. Moret-Blanc, du lycée du Havre.