NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

H. LEMONNIER

Démonstration des expressions de $\cos(a \pm b), \sin(a \pm b)$

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 10 (1871), p. 26-28

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1871_2_10__26_1>

DÉMONSTRATION DES EXPRESSIONS DE COS $(a \pm b)$, SIN $(a \pm b)$;

PAR M. H. LEMONNIER.

Soient a et b deux angles quelconques. Considérons une circonférence d'un rayon égal à l'unité. Les angles se comptant à partir du rayon OA, soit OM le rayon que détermine l'angle a; si l'angle b se porte à partir de OM d'un côté et de l'autre, les rayons OM', OM'' qui s'ensuivront feront avec OA les angles $a + b$, $a - b$; et les projections Om', Om'' de ces rayons, s'estimant positives ou négatives suivant que les directions de O en m' et de O en m'' sont celles de OA, ou opposée, seront $\cos(a+b)$, $\cos(a-b)$.

La corde $M'M''$ rencontrant le rayon OM ou son prolongement en P, le point P sera le milieu de la corde, et sa projection p celui du segment $m'm''$.

En conséquence, Op s'estimant comme Om' et Om'', on aura dans tous les cas

$$Om' + Om'' = 2Op,$$

ou bien

$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2Op.$$

Mais si OP est de même direction que OM, sa valeur est $\cos b$, et l'on a

$$Op = \text{OP} \cos a = \cos b \cos a.$$

Si OP et OM sont de directions opposées, la valeur de OP est $-\cos b$, et alors on a

$$Op = \text{OP} \cos(a+\pi) = -\cos b \cos(a+\pi) = \cos b \cos a.$$

D'après cela, nous avons, dans tous les cas, la formule

$$(1) \qquad \cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a \cos b.$$

En y changeant a en $a + \frac{\pi}{2}$, b en $b + \frac{\pi}{2}$, on en déduit

$$(2) \qquad -\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\sin a \sin b.$$

Il s'ensuit

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b,$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$$

Si dans les formules (1) et (2) on change seulement a en

$a + \frac{\pi}{2}$, elles deviennent

$$-\sin(a+b) - \sin(a-b) = -2\sin a \cos b,$$
$$\sin(a+b) - \sin(a-b) = 2\cos a \sin b;$$

et de là

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a,$$
$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a.$$