

AUGUSTE MOREL

**Exposé d'une théorie (géométrie
élémentaire) des sections coniques**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 10
(1871), p. 269-278

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1871_2_10_269_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1871, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**EXPOSÉ D'UNE THÉORIE (GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE)
DES SECTIONS CONIQUES;**

PAR M. AUGUSTE MOREL,

Ancien Élève de l'École Polytechnique, répétiteur à Sainte-Barbe.

Cet article a pour but de présenter aux élèves de Mathématiques spéciales, sous une méthode nouvelle, l'ensemble des propriétés des courbes du second degré qui font partie de leur programme, et de leur montrer comment, en se guidant sur les résultats fournis par le calcul, on peut refaire, par la géométrie élémentaire, une théorie établie par la géométrie analytique. Nous croyons donc leur être utile en leur donnant une sorte de programme de géométrie des coniques, avec quelques indications pour arriver à la démonstration des théorèmes. Pour les propositions qui se trouvent dans la *Géométrie* d'Amiot, nous renvoyons à cet ouvrage.

CHAPITRE I. — DE L'ELLIPSE.

1. *Définition.* — L'ellipse est une courbe telle, que la somme des distances MF , MF' de l'un quelconque de ses points à deux points fixes F et F' est égale à une longueur constante que j'appellerai $2a$. Les points F et F' sont les *foyers*; je désignerai leur distance par $2c$, et le rapport $\frac{c}{a}$ prendra le nom d'*excentricité*.

2. Construction de la courbe d'un mouvement continu.

3. Construction de la courbe par points.

4. *Théorème.* — L'ellipse a pour centre de symétrie le milieu O de la ligne FF', et pour axes de symétrie la ligne FF' et sa perpendiculaire passant par le point O.

5. *Théorème.* — Suivant qu'un point est intérieur ou extérieur à l'ellipse, la somme de ses distances aux deux foyers est plus petite ou plus grande que $2a$.

6. *Théorème.* — Si d'un point M d'une ellipse on abaisse la perpendiculaire MP sur l'axe focal, la différence des rayons vecteurs est proportionnelle à la distance OP de cette droite au centre.

Ce théorème résulte immédiatement de la définition de la courbe; car si l'on exprime au moyen de la perpendiculaire MP et de OP les carrés des rayons vecteurs, et que l'on fasse la différence de ces carrés, on en déduit

$$\rho - \rho' = 2 \cdot \frac{c}{a} \cdot OP.$$

7. *Théorème.* — Je prends sur l'axe focal d'une ellipse un point S, tel que l'on ait $OF \cdot OS = OA^2$, et par ce point je mène une tangente SC au cercle décrit sur AA' comme diamètre; je mène le rayon OC passant au point de contact, et par le point M, projection d'un point P de l'ellipse, la parallèle MN au rayon OC; la portion MN de cette parallèle comprise entre le point M et la tangente SC est égale au rayon vecteur FP.

Pour démontrer ce théorème, je mène la tangente S'C' parallèle à SC, et je prolonge la ligne NM jusqu'au point N' où elle rencontre S'C'; puis je démontre que $MN + MN' = 2a$ et que $MN' - MN = 2 \cdot \frac{c}{a} \cdot OM$, c'est-à-dire que l'on a la double égalité

$$\rho' + \rho = MN' + MN, \quad \rho' - \rho = MN' - MN;$$

d'où l'on déduit le théorème énoncé.

8. *Corollaire.* — Si par le point S je mène la droite SR perpendiculaire à AA', et du point P la ligne PR parallèle à AA', le rapport $\frac{FP}{PR}$ des distances d'un point quelconque de l'ellipse au foyer F et à la droite RS est constant et égal à $\frac{c}{a}$.

La droite RS s'appelle la *directrice* correspondant au foyer F. Il existe une autre directrice passant par le point S', symétrique du point S par rapport au centre, correspondant au foyer F'.

9. *Théorème.* — Si je prolonge l'ordonnée d'une ellipse jusqu'au point où elle rencontre le cercle décrit sur le grand axe comme diamètre, le rapport de l'ordonnée de l'ellipse à celle du cercle est constant.

Pour démontrer ce théorème, je joins le centre O au point M où l'ordonnée coupe le cercle, et du point F j'abaisse la perpendiculaire FR sur OM; je prouve alors :

1° Que OM — OR ou RM = FN, rayon vecteur du point N considéré;

2° Que $NP^2 = MP^2 - FR^2$.

Et, comme $FR = \frac{c}{a} \cdot MP$, on en déduit

$$NP^2 = MP^2 \cdot \left(\frac{a^2 - c^2}{a^2} \right) = MP^2 \cdot \frac{b^2}{a^2},$$

ce qui démontre le théorème.

10. *Corollaire.* — L'ordonnée d'un point quelconque de l'ellipse partage le grand axe en deux segments additifs tels, que le carré de l'ordonnée est au produit de ces deux segments comme b^2 est à a^2 .

11. *Théorème.* — La tangente à l'ellipse fait des angles égaux avec les rayons vecteurs du point de contact.

12. *Corollaire I.* — La tangente n'a qu'un point commun avec la courbe.

Corollaire II. — La normale bissecte l'angle des rayons vecteurs passant par son pied.

13. *Théorème.* — Le lieu des points symétriques de l'un des foyers par rapport à toutes les tangentes à l'ellipse est un cercle décrit de l'autre foyer comme centre avec $2a$ pour rayon.

Ce cercle prend le nom de *cercle directeur* relatif au foyer qui est son centre. On verrait de même qu'il existe un second cercle directeur relatif à l'autre foyer, et qui est le lieu des points symétriques du premier foyer par rapport aux tangentes.

14. *Corollaire.* — L'ellipse peut être considérée comme le lieu des points également distants d'un cercle et d'un point pris à son intérieur.

15. *Problème.* — Mener une tangente à l'ellipse par un point pris sur la courbe.

16. *Problème.* — Mener une tangente à l'ellipse par un point extérieur.

17. *Théorème.* — Le lieu des sommets des angles droits circonscrits à l'ellipse est un cercle.

Pour le prouver, je remarque que l'angle des lignes qui joignent le foyer F aux points de rencontre P, P' du cercle directeur et de la circonférence passant par le foyer F , et dont le centre est le point donné M_1 , doit être droit, puisqu'il a ses côtés perpendiculaires aux tangentes; donc le point M_1 doit être au milieu de la droite PP' , et l'on aura

$$F'M_1 + M_1P^2 = 4a^2,$$

et, en joignant le point M_1 au centre, on aura

$$OM^2 = \frac{4a^2 - 2c^2}{2} = 2a^2 - c^2 = a^2 + b^2;$$

donc OM est constant et égal à la diagonale du rectangle construit sur les demi-axes.

18. *Théorème.* — Si d'un point M extérieur à l'ellipse on mène les deux tangentes, et qu'on joigne les deux foyers au point donné et aux deux points de contact : 1° la ligne $F'M$ bissecte l'angle des rayons vecteurs menés du point F' ; 2° les lignes qui joignent les foyers au point M font, respectivement, des angles égaux avec les tangentes.

19. *Problème.* — Mener à l'ellipse une tangente parallèle à une direction donnée.

20. *Corollaire.* — Les deux points de contact des deux tangentes parallèles sont symétriques par rapport au centre, et réciproquement, si l'on mène les tangentes en deux points symétriques par rapport au centre, ces tangentes sont parallèles.

21. *Théorème.* — Le lieu géométrique des projections des foyers d'une ellipse sur les tangentes est le cercle décrit sur le grand axe comme diamètre.

22. *Théorème.* — Le produit des distances des deux foyers à une même tangente est constant et égal au carré du demi-petit axe.

23. *Théorème.* — Si une droite rencontre une ellipse aux points M et N , et la directrice correspondante au foyer F en P , et si l'on joint le foyer F aux points M , N , P , la ligne FP est la bissectrice de l'angle adjacent à celui des deux rayons vecteurs FM , FN .

Cela résulte de la définition même de la directrice, car si l'on abaisse les perpendiculaires Mm , Nn sur cette droite, on a

$$\frac{MP}{NP} = \frac{Mm}{Nn} = \frac{FM}{FN}.$$

24. Corollaire I. — Une droite ne peut rencontrer une ellipse qu'en deux points.

Corollaire II. — La ligne qui joint un foyer au point de rencontre d'une tangente et de la directrice correspondante, est perpendiculaire au rayon vecteur passant au point de contact.

Corollaire III. — Si par les extrémités d'une corde focale on mène des tangentes, ces lignes se coupent sur la directrice, et, réciproquement, si d'un point de la directrice on mène des tangentes, la droite qui joint les points de contact passe par le foyer.

Corollaire IV. — Les tangentes aux sommets sont perpendiculaires à l'axe correspondant.

25. Problème. — Déterminer les points d'intersection d'une droite et d'une ellipse déterminée par ses foyers et son grand axe.

26. Théorème. — Le point de rencontre d'une droite et de la directrice est le point de concours des tangentes communes que l'on peut mener aux cercles ayant pour centres les points de rencontre de la droite et de l'ellipse, et passant par le foyer correspondant à la directrice considérée.

On démontre facilement ce théorème en cherchant le point où la tangente commune coupe la ligne des centres, et prouvant que ce point appartient à la directrice.

27. Corollaire I. — Si la ligne donnée se déplace parallèlement à elle-même, il en est de même de la tangente commune.

Corollaire II. — Si la droite donnée passe par le centre, la tangente commune aux deux cercles précédents est aussi tangente au cercle décrit sur le grand axe comme diamètre.

28. *Théorème.* — Le lieu géométrique du point milieu d'une corde de direction donnée est une droite que l'on obtient en joignant le centre de l'ellipse au point de rencontre de la directrice et d'une droite menée par le foyer correspondant perpendiculairement à la direction donnée.

Pour le prouver, je remarque que cette perpendiculaire, passant par le point de rencontre des deux cercles désignés dans le théorème précédent, passe par le milieu α de la tangente commune, et que, par suite, la ligne qui joint le milieu de la corde au point α est perpendiculaire sur la tangente commune; si je mène par le centre une parallèle à la direction donnée, la droite $F\alpha$ coupera le cercle décrit sur le grand axe comme diamètre au point de contact de la tangente commune à ce cercle et à l'un des cercles décrits comme précédemment. On en déduit facilement que le lieu du point m , milieu de la corde de direction donnée, est une droite. Cette droite s'appelle le *diamètre* correspondant à la direction donnée.

29. *Corollaire.* — Si l'on cherche le diamètre correspondant à cette nouvelle direction que l'on vient de déterminer, on retrouvera une droite parallèle à la première.

30. *Scolie.* — Deux diamètres tels que chacun d'eux partage en deux parties égales les cordes parallèles à l'autre sont appelés *diamètres conjugués*. On voit facilement que les portions de deux diamètres conjugués situées d'un même côté du petit axe sont de part et

d'autre du grand axe, et que les axes eux-mêmes forment un système de diamètres conjugués.

31. *Théorème.* — Si par les extrémités P, P' de deux demi-diamètres conjugués, je mène les ordonnées et que je prolonge ces droites jusqu'aux points Q et Q', où elles rencontrent le cercle décrit sur le grand axe comme diamètre, les rayons OQ, OQ' de ce cercle sont à angle droit.

Pour démontrer ce théorème, il suffit de prouver que, si je mène une corde parallèle à OP' et que je prenne dans le cercle les points de mêmes abscisses que ses extrémités, la ligne qui joint ces points dans le cercle est parallèle à OQ', et que, de plus, le milieu de cette droite est sur OQ, et a même abscisse que le milieu de la parallèle à OP' ; en d'autres termes, que les deux diamètres OQ, OQ' jouent dans le cercle le rôle de diamètres conjugués.

32. *Corollaire.* — Si par un point du grand axe nous menons une tangente à l'ellipse et une tangente au cercle, les deux points de contact sont sur une même perpendiculaire au grand axe.

33. *Théorème.* — La somme des carrés des projections de deux diamètres conjugués sur un axe est égale au carré de cet axe.

Ce théorème se déduit immédiatement du précédent.

34. *Corollaire.* — La somme des carrés de deux diamètres conjugués est constante et égale à la somme des carrés des axes.

35. *Théorème.* — Si l'on mène une tangente quelconque terminée aux deux axes, le produit des segments compris sur cette tangente entre le point de contact et

chacun des axes est égal au carré du demi-diamètre parallèle à la tangente.

Ce théorème se déduit facilement du théorème (31) et de son corollaire.

36. *Théorème.* — La longueur d'un diamètre OP d'une ellipse est égale à la corde BFC menée par le foyer dans le cercle décrit sur le grand axe comme diamètre, parallèlement au rayon ayant même projection que OP.

La démonstration de ce théorème a déjà été donnée dans les *Annales*.

37. *Théorème.* — Le parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués a une aire constante.

Ce théorème résulte du corollaire (32); car, si je construis ce parallélogramme et que, par les points où ses côtés coupent le grand axe, je mène des tangentes au cercle décrit sur le grand axe comme diamètre, il est facile de prouver que je formerai un rectangle dont les sommets auront mêmes projections que ceux du parallélogramme considéré, et, de plus, que les ordonnées du sommet du parallélogramme seront à celles correspondant au rectangle dans le rapport de b à a . On en déduit que l'aire du parallélogramme considéré est égale à $4ab$.

38. *Problème.* — Construire les axes d'une ellipse dont on connaît, en grandeur et en position, deux diamètres conjugués.

La construction à suivre est celle indiquée dans la *Géométrie analytique* de MM. Briot et Bouquet, et dont la démonstration géométrique est très-simple.

39. *Théorème.* — Si une ligne droite AB de longueur constante glisse entre deux droites rectangulaires, un point quelconque M de cette droite décrit une ellipse dont les demi-axes sont AM et BM.

Pour le prouver, il suffit de faire voir que si, du point O comme centre avec AM comme rayon, je décris un cercle, les ordonnées de la courbe décrite par le point M sont aux ordonnées correspondantes de ce cercle dans le rapport constant de BM à AM .

Le théorème est encore vrai si le point M est pris en dehors du segment AB , mais sur cette droite.

(La suite prochainement.)
