

## **Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales**

*Nouvelles annales de mathématiques 2<sup>e</sup> série*, tome 10  
(1871), p. 223-239

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1871\\_2\\_10\\_\\_223\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1871_2_10__223_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1871, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

**SOLUTIONS DE QUESTIONS  
PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.**

---

*Questions 758 et 759*

(voir 2<sup>e</sup> série, t V, p 197),

PAR LE P. PEPIN, S. J.

QUESTION 758. *Le nombre  $a$  n'étant pas divisible par  $p$  nombre premier impair, on sait que  $a^{\frac{p-1}{2}} = Ap \pm 1$ ;*

le reste  $\pm 1$  est représenté par  $\left(\frac{a}{p}\right)$ , notation de Legendre. Cela posé, on a

$$\Sigma (ax^2 + b)^{p-1} = Bp - \left[ 1 + \left( \frac{-ab}{p} \right) \right],$$

$$\Sigma (ax^2 + by^2 + c)^{p-1} = Cp + \left( \frac{-ab}{p} \right).$$

$a, b, c$  sont des entiers non divisibles par  $p$ ;  $A, B, C$  sont des entiers; les sommes sont prises en donnant à  $x$  et à  $y$  les valeurs  $0, 1, 2, \dots, p-1$ .

(LE BESGUE.)

J'ajouterai que le nombre  $a$  est résidu quadratique de  $p$  ou non-résidu, suivant que l'on a

$$\left(\frac{a}{p}\right) = 1, \quad \text{ou} \quad \left(\frac{a}{p}\right) = -1;$$

de telle sorte que le nombre des solutions de l'équation indéterminée

$$(1) \quad x^2 - a = py$$

est toujours représenté par la somme

$$(2) \quad 1 + \left(\frac{a}{p}\right).$$

Considérons d'abord la première des sommes proposées. D'après le théorème de Fermat, les termes de cette somme, qui ne sont pas divisibles par  $p$ , se réduisent chacun à un multiple de  $p$  plus un. Par suite, la somme entière est égale à un multiple de  $p$ , plus l'unité répétée autant de fois que la formule

$$ax^2 + b$$

a de valeurs non divisibles par  $p$ . Or le nombre de ces valeurs est égal au nombre  $p$  des valeurs de  $x$  diminué

du nombre  $S_1$  des solutions de l'équation indéterminée

$$ax^2 + b = py$$

ou de l'équation équivalente

$$(ax)^2 - (-ab) = py.$$

D'après la formule (2), ce nombre est donné par l'équation

$$(3) \quad S_1 = 1 + \left( \frac{-ab}{p} \right).$$

On a donc

$$\Sigma (ax^2 + b)^{p-1} = Bp - \left[ 1 + \left( \frac{-ab}{p} \right) \right].$$

De même, la seconde somme est un multiple de  $p$  augmenté du nombre des valeurs de la formule

$$ax^2 + by^2 + c$$

qui ne sont pas divisibles par  $p$ . Or ce nombre s'obtient en retranchant de  $p^2$ , nombre total des valeurs de cette formule, le nombre  $S_2$  des valeurs divisibles par  $p$ . Tout revient donc à déterminer le nombre  $S_2$  des solutions de l'équation indéterminée

$$ax^2 + by^2 + c = \mathfrak{N}p,$$

$\mathfrak{N}p$  désignant un multiple de  $p$  qui variera en passant d'une formule à l'autre.

Multiplions par  $a$  cette équation, et posons

$$ax = z + \mathfrak{N}p, \quad -ab = \beta + \mathfrak{N}p, \quad ac = \alpha + \mathfrak{N}p;$$

nous aurons l'équation équivalente

$$(4) \quad z^2 + \alpha = \beta y^2 + \mathfrak{N}p,$$

où la variable  $z$  doit prendre, comme la variable  $y$ , les valeurs  $0, 1, 2, \dots, p-1$ .

Pour évaluer le nombre des solutions de cette équation, considérons simultanément les deux équations

$$(a) \quad z^2 + \alpha = y^2 + \mathfrak{N}p,$$

$$(b) \quad z^2 + \alpha = ny^2 + \mathfrak{N}p,$$

en désignant par  $n$  un non-résidu quadratique de  $p$ . Désignons par  $m$  le nombre des solutions de la première, et par  $m'$  celui des solutions de la seconde. On aura

$$m + m' = 2p.$$

En effet, si l'on donne à  $z$  les  $p$  valeurs  $0, 1, 2, 3, \dots, p-1$ , pour chaque valeur de  $z$ , on obtiendra deux solutions dans l'ensemble des équations (a) et (b), savoir: deux solutions de l'équation (a), quand la somme  $z^2 + \alpha$  est résidu de  $p$ , deux solutions de l'équation (b), quand la même somme est non-résidu, et enfin une solution de l'équation (a) et une de l'équation (b), quand cette somme est un multiple de  $p$ .

Le nombre  $m$  se détermine aisément. L'équation (a) peut s'écrire

$$(y + z)(y - z) = \alpha + \mathfrak{N}p.$$

Or posons

$$y + z = h + \mathfrak{N}p, \quad y - z = k + \mathfrak{N}p,$$

$h$  et  $k$  désignant des nombres compris, comme  $y$  et  $z$ , dans la suite  $0, 1, 2, \dots, p-1$ . Nous aurons la relation

$$hk = \alpha + \mathfrak{N}p,$$

qui, pour chaque valeur de  $k$ , déterminera pour  $h$  une valeur unique, et les équations précédentes donneront pour  $y$  et pour  $z$  un seul système de valeurs. Le nombre de ces systèmes, c'est-à-dire le nombre  $m$  des solutions de l'équation (a) est donc égal à  $p-1$ .

Ce nombre  $m$  a été déterminé à peu près de la même

manière par M. Camille Jordan. (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXII, p. 689.)

L'équation

$$m + m' = 2p$$

nous donnera par conséquent

$$m' = p + 1.$$

Le nombre des solutions de l'équation (4) est donc égal à  $p - 1$  ou à  $p + 1$ , suivant qu'elle se ramène à l'équation (a) ou à l'équation (b), c'est-à-dire suivant que  $\beta$  est résidu ou non-résidu de  $p$ . Ce nombre est donc représenté dans tous les cas par la formule

$$p - \left(\frac{\beta}{p}\right).$$

En remplaçant  $\beta$  par sa valeur  $-ab + \mathfrak{N}p$ , on aura

$$(5) \quad S_2 = p - \left(\frac{-ab}{p}\right).$$

Or nous avons vu que la somme  $\Sigma(ax^2 + by^2 + c)^{p-1}$  est égale à un multiple de  $p$  diminué de  $S_2$ . On a donc

$$\Sigma(ax^2 + by^2 + c)^{p-1} = Cp + \left(\frac{-ab}{p}\right).$$

C. Q. F. T.

**QUESTION 759.** Les nombres  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_m, a_{m+1}$  sont des entiers  $< p$  et non divisibles par  $p$ . On représente par  $S_m^0, S_m$  les nombres de solutions des équations indéterminées

$$(I) \quad a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + \dots + a_m x_m^2 = py,$$

$$(II) \quad a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + \dots + a_m x_m^2 + a_{m+1} = py,$$

en prenant  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_m$  parmi les nombres  $0, 1, 2, \dots, p - 1$ .

On demande la démonstration des formules

- (1)  $(p - 1) S_m = S_{m+1}^0 - S_m^0,$
- (2)  $S_1^0 - 1 = 0,$
- (3)  $S_1 - 1 = \left( \frac{-a_1 a_2}{p} \right),$
- (4)  $S_2^0 - p = (p - 1) \left( \frac{-a_1 a_2}{p} \right),$
- (5)  $S_2 - p = - \left( \frac{-a_1 a_2}{p} \right),$
- (6)  $S^0 - p^{m-1} = p (S_{m-2}^0 - p^{m-3}) \left( \frac{-a_{m-1} a_m}{p} \right),$
- (7)  $S_{2n+1}^0 - p^{2n} = 0,$
- (8)  $S_{2n}^0 - p^{2n-1} = p^{n-1} (p - 1) \left[ \frac{(-1)^n a_1 a_2 \dots a_{2n}}{p} \right],$
- (9)  $S_{2n} - p^{2n-1} = - p^{n-1} \left[ \frac{(-1)^n a_1 a_2 \dots a_{2n}}{p} \right],$
- (10) (\*)  $S_{2n+1} - p^{2n} = p^n \left[ \frac{(-1)^{n+1} a_1 a_2 \dots a_{2n+2}}{p} \right].$

Les numéros indiquent l'ordre à suivre dans les démonstrations, qui sont fort simples. (LE BESGUE.)

Si, désignant par  $z_{m+1}$  l'un quelconque des nombres 1, 2, 3, ...,  $p - 1$ , on multiplie l'équation (II) par  $z_{m+1}^2$ , et que l'on pose

$$(III) \quad z_{m+1} x_i = z_i + p y$$

pour toutes les valeurs 1, 2, 3, ...,  $m$  de l'indice  $i$ , cette équation pourra se mettre sous les deux formes suivantes :

$$(IV) \quad z_{m+1}^2 (a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + \dots + a_m x_m^2 + a_{m+1}) = p y,$$

$$(V) \quad a_1 z_1^2 + a_2 z_2^2 + a_3 z_3^2 + \dots + a_m z_m^2 + a_{m+1} z_{m+1}^2 = p y.$$

---

(\*) Dans cette dernière formule, j'ai corrigé une faute d'impression.

Sous la dernière forme, elle est un cas particulier de l'équation (I). Si donc  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_m$  forment une solution de l'équation (II), l'équation (III) donnera  $(p - 1)$  solutions de l'équation (V), pourvu que l'on donne successivement à  $z_{m+1}$  les  $(p - 1)$  valeurs  $0, 1, 2, \dots, p - 1$ . En employant successivement toutes les solutions de l'équation (II), on obtiendra toutes les solutions de l'équation (V), à l'exception de celles qui correspondent à la valeur particulière  $z_{m+1} = 0$ ; en effet, les équations (III) et (IV) montrent qu'à toute solution de l'équation (V), dans laquelle  $z_{m+1}$  est différent de zéro, correspond toujours une solution de l'équation (II). D'un autre côté, toutes les solutions obtenues sont distinctes, parce qu'elles diffèrent ou bien par la valeur de  $z_{m+1}$ , ou bien par l'une des valeurs de  $z_1, z_2, \dots, z_m$ , si elles correspondent à une même valeur de  $z_{m+1}$ . On a donc

$$(1) \quad S_{m+1}^0 - S_m^0 = (p - 1)S_m.$$

On a évidemment

$$(2) \quad S_1^0 - 1 = 0;$$

car le nombre  $a_1$  étant supposé non divisible par  $p$ , la congruence

$$a_1 x_1' = py$$

n'a qu'une solution  $x_1 = 0$ .

Si donc dans la formule (1) on fait  $m = 1$ , on aura

$$S_2^0 - 1 = (p - 1)S_1.$$

Or  $S_1$ , désignant le nombre des solutions de l'équation

$$a_1 x_1' + a_2 = py,$$

a été déterminé dans la formule (3) de la question précé-



dente : on a

$$(3) \quad S_1 = 1 + \left( \frac{-a_1 a_2}{p} \right).$$

Substituant cette valeur dans l'équation précédente, nous obtiendrons

$$S_2 - 1 = (p - 1) + (p - 1) \left( \frac{-a_1 a_2}{p} \right),$$

d'où

$$(4) \quad S_2 - p = (p - 1) \left( \frac{-a_1 a_2}{p} \right).$$

Enfin, en remplaçant  $a, b, c$  par  $a_1, a_2, a_3$  dans la formule (5) de la question précédente, nous avons

$$(5) \quad S_2 - p = - \left( \frac{-a_1 a_2}{p} \right).$$

Reprenons les équations (I) et (II), et posons

$$a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots + a_m x_m^2 + a_{m+1} = h.$$

La formule (5) établit une relation simple entre le nombre  $S_m$  des solutions de l'équation (II) et le nombre  $S_{m-1}$  des solutions de l'équation

$$(VI) \quad a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots + a_m x_m^2 + a_{m+1} = py.$$

Pour l'obtenir, partageons en deux groupes les solutions de l'équation (II), plaçant dans un premier groupe toutes celles qui répondent à des valeurs de  $k$  non divisibles par  $p$ , et dans un second groupe celles pour lesquelles  $k$  est un multiple de  $p$ . Le nombre des premières sera

$$(p^{-1} S_1) \left[ p - \left( \frac{-a_1 a_2}{p} \right) \right];$$

car, pour chacun des systèmes de valeurs  $x_3, x_4, \dots, x_m$  auxquels correspond une valeur de  $k$  non divisible par  $p$ , l'équation (II) admet le même nombre de solutions que l'équation

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + k = py.$$

En vertu de la formule (5), ce nombre est égal à

$$p - \left( \frac{-a_1 a_2}{p} \right).$$

Le nombre total des systèmes  $x_3, x_4, \dots, x_m$  est  $p^{m-2}$ . Celui de ces systèmes pour lesquels  $k$  est un multiple de  $p$  est égal au nombre  $S_{m-2}$  des solutions de l'équation (VI). La différence

$$p^{m-2} - S_{m-2}$$

exprime donc le nombre des systèmes  $x_3, x_4, \dots, x_m$ , auxquels correspondent des valeurs de  $k$  non divisibles par  $p$ . Pour chacun de ces systèmes, nous avons vu que l'équation (II) admet un nombre de solutions égal à

$$p - \left( \frac{-a_1 a_2}{p} \right);$$

donc le nombre des solutions du premier groupe est égal au produit

$$(p^{m-2} - S_{m-2}) \left[ p - \left( \frac{-a_1 a_2}{p} \right) \right].$$

Si  $k = py$ , l'équation (II) se réduit à la suivante :

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 = py,$$

qui admet un nombre de solutions déterminé par la formule (4)

$$S_2^e = p + (p-1) \left( \frac{-a_1 a_2}{p} \right);$$





De même les formules (6)' et (5) donnent la suite d'équations

$$\begin{aligned} S_{2n} - p^{2n-1} &= (S_{2n-2} - p^{2n-3}) p \left( \frac{-a_1 a_2}{p} \right), \\ S_{2n-2} - p^{2n-3} &= (S_{2n-4} - p^{2n-5}) p \left( \frac{-a_3 a_4}{p} \right), \\ &\dots\dots\dots \\ S_2 - p &= - \left( \frac{-a_{2n-1} a_{2n}}{p} \right); \end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$(9) \quad S_{2n} - p^{2n-1} = -p^{n-1} \left[ \frac{(-1)^n a_1 a_2 \dots a_{2n}}{p} \right].$$

En employant la formule (1), nous aurions pu déduire les formules (9) et (10) des formules (7) et (8).

### Question 860

(voir 2<sup>e</sup> série, t. VII, p. 190);

PAR MM. BROCARD ET GRASSAT.

*Un cercle (C) de centre O roule sur une droite. Trouver le lieu des points d'inflexion des cycloïdes raccourcies décrites par tous les points d'un cercle décrit sur un rayon du cercle (C) comme diamètre.*

(A. RIBAUCCOUR.)

Soit M le point choisi sur le second cercle. Ce point décrit, pendant le roulement du cercle OB sur la droite IA, une cycloïde raccourcie dont le point le plus bas correspond à la position verticale de OM, qui coupe IA en un certain point I, que nous prenons pour origine. Soit MOA = u; on aura pour coordonnées du point M

$$\begin{aligned} x &= au - b \sin u, \\ y &= a - b \cos u, \end{aligned}$$

$a$  désignant  $OB$ , et  $b$ ,  $OM$ . L'on peut avoir facilement la relation qui lie  $u$  à  $b$  pour le point d'inflexion. On trouve ainsi qu'en ce point

$$\cos u = \frac{b}{a}.$$

Cela indique que le rayon  $OM$  correspond au point d'inflexion  $M$  quand il bissecte l'angle  $BOA$ . D'après cela, l'élimination de  $u$  et de  $b$  entre les trois équations précédentes fournira le lieu des points d'inflexion  $M$  cherché. L'élimination est rapide et conduit à l'équation

$$x = a \cdot \text{arc cos} \frac{\sqrt{a^2 - ay}}{a} - \sqrt{a - ay} \sqrt{\frac{y}{a}},$$

ou bien

$$x = a \cdot \text{arc cos} \sqrt{\frac{a - y}{a}} - \sqrt{ay - y^2},$$

l'équation d'une cycloïde ordinaire engendrée par un point d'une circonférence de rayon  $\frac{a}{2}$  roulant sur la droite  $IA$ .

Ce résultat pouvait être prévu, car, la droite  $OM$  devant être la bissectrice de  $BOA$ , la ligne  $BM$ , qui lui est perpendiculaire, passe aussi par le point  $A$ . Le reste de la proposition s'en déduit facilement.

*Note.* — La question 860 a été résolue aussi par MM. P. Willière, professeur à Arlon; Fr. Conradt, étudiant à Berlin; G. Coridas, à Pau; A. Lemaitre, à Besançon.

### Question 910

( voir 2<sup>e</sup> série, t. VIII, p. 47 );

PAR M. J. G.,

Étudiant à l'université de Turin.

*Deux triangles OAB, OA'B' ont un sommet commun : OAB est donné en grandeur et en position, OA'B' en*

*grandeur seulement. Placer OA'B' de façon que les droites AA', BB' fassent entre elles un angle donné.*

(E. LEMOINE.)

Supposons le problème résolu; faisons  $AO = a$ ,  $OB = b$ ;  $A'O = a'$ ,  $OB' = b'$ , et appelons  $x, y; z, u$  les angles de OA et OA' avec AA', et de OB et OB' avec BB'. On a

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{a'}{a} = r,$$

$$\frac{\sin z}{\sin u} = \frac{b'}{b} = r'.$$

Les sommes ou les différences, selon le cas, des angles  $x$  et  $z, y$  et  $u$  sont connues. On déterminera à la fois les angles  $x, y, z, u$  de la manière suivante.

Soient  $x + z = \varphi$ ,  $y + u = \varphi_1$ . Par un point M, menons trois droites MP, MQ, MR, de manière que

$$\widehat{PMQ} = \pi - \varphi, \quad \widehat{PMR} = \pi - \varphi_1,$$

et prenons sur QM et RM deux longueurs MQ, MR, telles que

$$\frac{MQ}{MR} = \frac{r}{r'}.$$

Déterminons le point P de telle sorte que

$$\frac{\sin QPM}{\sin RPM} = r;$$

cette détermination ne présente pas de difficulté. Cela fait, les angles QPM, RPM, PQM, PRM sont les angles cherchés.

On peut encore résoudre la question en cherchant les intersections des ellipses concentriques engendrées par les sommets des deux triangles donnés, lorsqu'ils se meuvent de façon que les autres sommets A, A', B, B' glissent

sur deux droites faisant entre elles l'angle donné. Cependant cette solution est en défaut lorsque l'angle donné est zéro ou 180 degrés.

*Note.* — La question 910 a été aussi résolue par M. Moret-Blanc, professeur au lycée du Havre

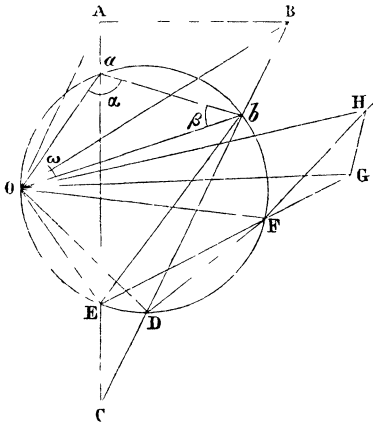
### *Solution géométrique de la question 910*

( voir 2<sup>e</sup> partie, t VIII, p 17 )

Deux triangles  $OAB$ ,  $Oab$  ont un sommet commun,  $OAB$  est donné en grandeur et en position;  $Oab$  en grandeur seulement. Placer  $Oab$  de façon que les droites  $Aa$ ,  $Bb$  fassent entre elles un angle donné.

(E. LEMOINE.)

Soient  $C$  l'angle donné, et  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\omega$  les angles du triangle  $Oab$ , qui ont leurs sommets au points  $a$ ,  $b$ ,  $O$ .



Supposant la question résolue, je circonscris au triangle  $Oab$  une circonférence qui rencontrera en des points  $E$ ,  $D$  les droites  $Aa$ ,  $Bb$  suffisamment prolongées,



et je mène les droites OE, OD, bE; il en résultera évidemment ces égalités d'angles :

$$AEO = abO = \epsilon,$$

$$BDO = 2 \text{ droits} - baO = 2 \text{ droits} - \alpha;$$

égalités qui montrent que les points E, D appartiennent respectivement à des arcs de segments capables des angles  $\epsilon$  et  $2 \text{ droits} - \alpha$ , décrits sur les droites OA, OB. Les diamètres OG, OH des cercles dont ces deux segments font partie seront déterminés en grandeur et en position.

Actuellement, soit OF le diamètre de la circonférence circonscrite au triangle *Oab*, et issu du point O. Les trois points E, F, G seront en ligne droite, car les angles OEF, OEG sont droits, comme inscrits dans les demi-cercles dont les diamètres sont les droites OF, OG. De même, les points D, F, H appartiennent à une même droite. On aura donc

$$GFH = DFE = DbE = bEa - C.$$

Mais

$$bEa = bOa = \omega,$$

par conséquent

$$GFH = \omega - C.$$

Ainsi, le point F se trouve sur l'arc d'un segment capable de l'angle  $\omega - C$ , décrit sur la droite GH. En outre, le point F appartient à une circonférence décrite du point O comme centre avec un rayon égal à la droite OF, dont la grandeur est connue, puisque cette droite est un diamètre de la circonférence circonscrite à un triangle *Oab* dont les côtés sont donnés en grandeur. Le point F sera donc déterminé par l'intersection de deux circonférences connues.

Pour achever la construction, on décrira sur OF

comme diamètre une circonférence qui coupera les droites GF, HF aux points E, D, et les droites AE, BD aux points  $a$ ,  $b$ ; ce qui fera connaître la position qu'il faut donner au triangle  $Oab$  pour que les droites  $Aa$ ,  $Bb$  fassent entre elles l'angle indiqué. G.

*Rectifications.* — 1. La solution donnée (numéro d'avril, p. 184) ne se rapporte pas à la question 910, mais au cas où l'angle que l'on donne serait celui des droites  $AB$ ,  $A'B'$ .

2. La question 1017 (numéro de mars 1871) a déjà été proposée sous le n° 981, en février 1870.