

DÉSIRÉ ANDRÉ

Théorèmes d'arithmétique

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 10
(1871), p. 207-208

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1871_2_10__207_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1871, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

THÉORÈMES D'ARITHMÉTIQUE;

PAR M. DESIRÉ ANDRÉ.

THÉORÈME I. — *Le nombre n étant entier et supérieur à 1, l'équation*

$$x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1) = y^n$$

est impossible en nombres entiers supérieurs à zéro.

Pour le démontrer, nous distinguerons deux cas, suivant que n est égal ou supérieur à 2.

1° $n = 2$. L'équation

$$x(x+1) = y^2$$

est impossible en nombres entiers supérieurs à zéro. En effet, si elle admettait la solution $x = \alpha$, $y = \beta$, le nombre entier β serait compris entre α et $\alpha + 1$, ce qui est impossible, puisque α et $\alpha + 1$ sont deux entiers consécutifs.

2° $n > 2$. L'équation

$$x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1) = y^n$$

est encore impossible en nombres entiers supérieurs à zéro. En effet, si l'équation admettait la solution $x = \alpha$, $y = \beta$, le nombre entier β serait évidemment l'un des nombres $\alpha + 1, \alpha + 2, \dots, \alpha + n - 2$; alors le premier membre contiendrait $\beta - 1$ en facteur, et β^n serait divisible par $\beta - 1$, ce qui est impossible.

THÉORÈME II. — *Le nombre n étant entier et supérieur à 2, l'équation*

$$x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1) = y^n + 1$$

est impossible en nombres entiers supérieurs à zéro.

En effet, si cette équation admettait la solution $x = \alpha$, $y = \beta$, le nombre entier β serait évidemment l'un des nombres $\alpha + 1, \alpha + 2, \dots, \alpha + n - 2$; alors le premier membre contiendrait $\beta + 1$ en facteur, et $\beta^n + 1$ serait divisible par $\beta - 1$, ce qui est impossible.

Remarque. — Dans le cas où $n = 2$, il est facile de démontrer que l'équation considérée n'admet que la solution unique $x = y = 1$.

THÉORÈME III. — *Le nombre n étant entier, impair et supérieur à 1, l'équation*

$$x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1) = y^n - 1$$

est impossible en nombres entiers supérieurs à zéro.

En effet, si elle admettait la solution $x = \alpha$, $y = \beta$, le nombre entier β serait évidemment l'un des nombres $\alpha + 1, \alpha + 2, \dots, \alpha + n - 2$; alors le premier membre contiendrait $\beta + 1$ en facteur, et $\beta^n - 1$ serait divisible par $\beta + 1$, ce qui est impossible, puisque n est impair.
