

Solutions des questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 10
(1871), p. 181-188

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1871_2_10__181_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1871, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**SOLUTIONS DES QUESTIONS PROPOSÉES
DANS LES NOUVELLES ANNALES.**

Question 881

(voir 2^e série, t. VI, p. 249),

PAR M. TOUBIN,

à Lons-le-Saunier.

*Lorsqu'un nombre premier est de la forme $1 + 2^n$,
l'exposant n est nul ou de la forme 2^m .*

(LIONNET.)

Ce théorème est un cas particulier de celui-ci : *Lors-*

qu'un nombre premier est de la forme $A^n + 1$, l'exposant n est nul ou de la forme 2^k .

Pour démontrer ce dernier, supposons que n ne soit pas nul et ne soit pas de la forme 2^k ; il sera forcément de la forme $2^p k$, k étant impair; le nombre premier $A^n + 1$ sera de la forme $P^k + 1$; or cette conclusion est absurde, puisque, k étant impair, $P^k + 1$ est divisible par $P + 1$.

Question 896

(voir 2^e série, t. VII, p. 537),

PAR M. VALLIER,

Élève du collège Rollin.

Soit I un point d'inflexion d'une cubique : par I menons des tangentes en P, Q, R à la courbe, et par P des tangentes en A, B, C, D . Montrer que I, Q, R sont les points de rencontre respectifs des trois couples de côtés opposés du quadrilatère $ABCD$. (SYLVESTER.)

Je prends le triangle IQR pour triangle de référence. L'équation

$$J(l\beta j + mj\alpha + nz\beta) = \alpha\beta(A\alpha + B\beta)$$

représente une cubique circonscrite au triangle et tangente en QR : comme elle contient encore quatre paramètres, c'est l'équation générale.

Je vais exprimer que le point I est un point d'inflexion en écrivant que sa conique polaire se réduit à deux droites, dont l'une est la droite QR ; cette conique a pour équation

$$2l\beta j + 2mj\alpha + nz\beta = 0$$

Il faut donc que l'on ait

$$n = 0.$$

et il vient

$$j^2(l\beta + m\alpha) = \alpha\beta(A\alpha + B\beta).$$

Le point P, étant à l'intersection de QR avec la courbe, est donné par

$$j = 0, \quad A\alpha + B\beta = 0;$$

l'équation de sa conique polaire est

$$B(mj^2 - 2A\alpha\beta - B\beta^2) = A(lj^2 - 2B\alpha\beta - A\alpha^2),$$

ou

$$A^2\alpha^2 - B^2\beta^2 + (Bm - Al)j^2 = 0.$$

Ainsi les points A, B, C, D sont sur une conique conjuguée au triangle de référence. Je vais démontrer qu'ils sont sur une seconde conique conjuguée aussi, et tout sera démontré. Or ces points sont aussi sur la courbe

$$j^2(l\beta + m\alpha) = \alpha\beta(A\alpha + B\beta).$$

Ils sont donc sur le lieu obtenu en divisant les deux équations membre à membre, ou

$$\frac{A^2\alpha^2 - B^2\beta^2}{\alpha\beta(A\alpha + B\beta)} = \frac{Al - Bm}{l\beta + m\alpha},$$

ce qui donne d'abord

$$A\alpha + B\beta = 0,$$

équation de IP, qui est la tangente issue de I, et ne fait pas partie du faisceau ABCD, et

$$(A\alpha - B\beta)(l\beta + m\alpha) = \alpha\beta(Al - Bm),$$

$$Am\alpha^2 - Bl\beta^2 = 0.$$

C'est encore une conique conjuguée au triangle (ici c'est le système de deux des sécantes); donc le théorème est démontré.

Question 910

(voir 2^e série, t. VIII, p. 47);

PAR M. A. MOREL.

Deux triangles OAB, OA'B' ont un sommet commun; OAB est donné en grandeur et en position, OA'B' est donné en grandeur seulement. Placer OA'B' de façon que les droites AA', BB' fassent un angle donné ().*

(E. LEMOINE.)

Si je suppose le problème résolu, je remarque que les points A' et B' appartiendront respectivement à deux circonférences concentriques décrites avec OA' et OB' comme rayons; de plus, la ligne A'B' a une longueur et une direction données, en vertu de la condition imposée dans l'énoncé. Le problème revient donc au problème suivant : *Mener entre deux circonférences données une ligne droite de longueur donnée et parallèle à une direction donnée.* Ce problème est très-connu, et je ne fais qu'en rappeler ici la solution. Du centre O, je mène une ligne égale et parallèle à A'B', j'obtiens ainsi un point O'. Du point O' comme centre, avec OA' comme rayon, je décris un arc de cercle qui coupe en B₁, B₂ le cercle de rayon OB'. Je joins le point O' à l'un des points B₁, B₂, et je mène les rayons parallèles OA₁, OA₂. En joignant les lignes OA₁, OB₁, B₁A₁, j'ai une solution de la question.

Il est à remarquer que le problème comporte toujours quatre solutions; en effet, on peut d'abord faire l'angle donné avec la droite AB de deux côtés différents; puis, le triangle OA'B' étant supposé exister, la ligne A'B' est plus petite que la somme des deux autres côtés, et plus

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

grande que leur différence; donc les cercles OB' , et $O'B'$, se couperont toujours.

Le nombre des solutions se réduirait à deux si l'on supposait l'angle donné compté de 0 à 180 degrés au-dessus de la ligne AB , et dans le sens AB et non BA .

Question 941

(voir 2^e série, t. VIII, p. 275);

PAR M. DÉSIRÉ ANDRÉ.

I.

THÉORÈME. — *Tout nombre pair est égal à un cube, qui n'est pas nul, plus trois carrés.*

(DÉSIRÉ ANDRÉ.)

Pour le démontrer, nous rappellerons ce théorème bien connu : « Tout nombre de la forme $8n + 3$ est la somme de trois carrés »; et nous ferons remarquer : d'une part, que les cubes des nombres, 1, 3, 5, 7, divisés chacun par 8, donnent respectivement pour restes 1, 3, 5, 7; de l'autre, que tout nombre pair, 2 excepté, est de l'une des formes

$$8n + 4, \quad 8n + 6, \quad 8n + 8, \quad 8n + 10,$$

n étant zéro ou un nombre entier.

Cela étant, il est visible que le théorème est vrai :

1^o Pour tous les nombres pairs de la forme $8n + 4$, car

$$8n + 4 = 1^3 + (8n' + 3);$$

2^o Pour tous les nombres pairs de la forme $8n + 6$, dès qu'ils dépassent 3^3 , car

$$8n + 6 = 3^3 + (8n' + 3);$$

3° Pour tous les nombres pairs de la forme $8n + 8$, dès qu'ils dépassent 5^3 , car

$$8n + 8 = 5^3 + (8n' + 3);$$

4° Enfin pour tous les nombres pairs de la forme $8n + 10$, dès qu'ils dépassent 7^3 , car

$$8n + 10 = 7^3 + (8n' + 3).$$

Pour étendre le théorème à tous les nombres pairs, il suffit donc de le vérifier pour tous les nombres pairs autres que les précédents, c'est-à-dire pour 2; pour les trois nombres de la forme $8n + 6$ qui sont inférieurs à 3^3 ; pour les quinze nombres de la forme $8n + 8$ qui sont inférieurs à 5; enfin pour les quarante-deux nombres de la forme $8n + 10$ qui sont inférieurs à 7^3 . Vérifications faites, le théorème s'applique à tous ces nombres; donc il est général.

Remarque. — Il est évident que, quand les nombres pairs considérés sont suffisamment grands, on peut remplacer les cubes des nombres 1, 3, 5, 7 par les cubes de nombres impairs supérieurs à ceux-ci. Il en résulte que la décomposition en un cube et trois carrés peut, en général, s'effectuer de plusieurs manières.

II.

Au lieu des cubes de 1, 3, 5, 7, considérons les puissances $(2\alpha + 1)^{i^{\text{èmes}}}$ de ces nombres, $2\alpha + 1$ étant un nombre impair quelconque; nous trouvons que ces puissances, divisées par 8, donnent respectivement pour restes 1, 3, 5, 7. Par suite, quel que soit un nombre pair supérieur à $7^{2\alpha+1}$, nous pourrions toujours, en retranchant l'un des nombres $1^{2\alpha+1}$, $3^{2\alpha+1}$, $5^{2\alpha+1}$, $7^{2\alpha+1}$, obtenir un résultat de la forme $8n + 3$. Or, on sait que tout nombre

de la forme $8n + 3$ est la somme de trois carrés *impairs* ; donc on peut énoncer le théorème général suivant :

THÉORÈME. — *Tout nombre pair supérieur à $7^{2\alpha+1}$ est égal à une puissance $(2\alpha + 1)^{\text{ième}}$, différente de zéro, plus trois carrés, tous différents de zéro.*

Remarque. — On voit que le théorème qui fait l'objet de la question 941 n'est autre chose que le théorème précédent, réduit au cas de $\alpha = 1$, étendu, soit par démonstration, soit par vérification, aux nombres pairs inférieurs à 7^3 , et délivré de la condition que les carrés soient tous différents de zéro. Le maintien de cette dernière condition eût empêché d'étendre le théorème à certains nombres pairs, à 2 par exemple.

Question 971

(voir 2^e série, t. VIII, p. 562) ;

PAR M. E. KRUSCHWITZ,

Étudiant en mathématiques, à Berlin.

Trouver la loi de formation des nombres dont les carrés sont terminés par deux chiffres égaux.

(H. BROCARD.)

Nous n'avons à examiner que les nombres inférieurs à 50, vu qu'un multiple de 50 ajouté à un nombre n'influe pas sur les deux derniers chiffres de son carré. De ces nombres inférieurs à 50, il faut rejeter tous ceux qui sont impairs et tous ceux qui sont terminés par 4 ou 6, puisque les deux derniers chiffres de leurs carrés, étant l'un pair, l'autre impair, ne peuvent être égaux. Reste donc à considérer les nombres terminés par 0, 2 ou 8.

Tous les nombres terminés par zéro, ayant leurs carrés terminés par deux zéros, répondent à la question.

Si x est l'avant-dernier chiffre d'un nombre terminé

par 2, il faut que $4x$ soit terminé par 4; et, x étant inférieur à 5, cela n'arrive que pour $x = 1$. Donc 12 est le seul nombre inférieur à 50 et terminé par 2, qui répond à la question.

Si x est l'avant-dernier chiffre d'un nombre terminé par 8, il faut que $16x + 6$ se termine par 4, ou $16x$ par 8, ce qui n'a lieu que pour $x = 3$, puisque x est inférieur à 5. Donc 38 est le seul nombre, inférieur à 50 et terminé par 8, qui répond à la question.

Ainsi tous les nombres cherchés sont de l'une des trois formes

$$10\alpha, \quad 50\alpha + 12, \quad 50\alpha + 38,$$

ou bien

$$10\alpha, \quad 50\alpha + 12, \quad 50\alpha - 12.$$

La série de ces nombres est

$$0, 10, 12, 20, 30, 38, 40, 50, 60, 62, 70, \dots$$

On peut remarquer que les différences premières sont

$$10, 2, 8, 10, 8, 2, 10; 10, 2, 8, \dots,$$

et qu'elles forment une série périodique dont chaque période contient cinq nombres, symétriquement placés par rapport à celui du milieu.

Note. — La même question a été traitée par MM. Adrien Guébhard, étudiant en médecine, à Paris; Charles Bloch, du lycée Napoléon; Émile Laclais; H.-V. Duruy, élève du lycée de Metz; Octave Espanet, du lycée de Nîmes; O. Callaudreau, à Angoulême; Moret-Blanc, professeur au lycée du Havre; Lucien Bignon, à Lima (Pérou); H. Rumpfen, étudiant en mathématiques, à Bonn.

Remarque. — M. H. Brocard nous a fait observer que tous les nombres de la forme $50\alpha + 14$ ont leurs cubes terminés par 44.
