

WILLIAM WALTON

**Des coordonnées biangulaires**

*Nouvelles annales de mathématiques* 2<sup>e</sup> série, tome 10  
(1871), p. 122-135

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1871\\_2\\_10\\_\\_122\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1871_2_10__122_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1871, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

---

## DES COORDONNÉES BIANGULAIRES;

PAR M. WILLIAM WALTON.

(Traduit de l'anglais de *The Quarterly Journal of pure and applied Mathematics.*)

Des diverses classes de courbes de la Géométrie analytique, les unes sont représentées par des coordonnées bilinéaires, et c'est le plus grand nombre; les autres le sont par des coordonnées polaires. Il y a cependant un nombre considérable de courbes dont il est très-difficile de trouver les propriétés à l'aide de l'un ou l'autre de ces systèmes de coordonnées.

Imaginons deux points fixes A et B, et un point variable P. Je mène les lignes AB, AP, BP, et je désigne les angles PAB, PBA respectivement par  $\theta$ ,  $\varphi$ . Le lieu du point P peut être représenté par l'équation  $F(\theta, \varphi) = 0$ , et l'on peut dire alors qu'il est rapporté à des coordon-

*nées biangulaires.* Un certain nombre de courbes peuvent être représentées de cette manière, et repoussent l'emploi des coordonnées bilinéaires, trilineaires ou polaires. Telles sont par exemple les courbes

$$\theta^2 \pm \varphi^2 = 1.$$

On se propose dans cette Note de présenter quelques observations sur l'expression biangulaire de certaines propriétés de la ligne droite et des courbes. La méthode des coordonnées biangulaires pourrait être poussée plus loin, mais ce que nous en dirons ici suffira pour mettre les élèves à même d'attaquer d'autres questions de Géométrie analytique au moyen de ces coordonnées.

1. Les perpendiculaires abaissées des points A et B (\*) sur une droite indéfinie la coupent respectivement en Y et Z. La ligne AB est vue des points Y et Z sous les angles  $\lambda$  et  $\mu$ ,  $\theta$  et  $\varphi$  étant les coordonnées biangulaires d'un point quelconque P de la ligne droite.

Du point O, milieu de AB, je mène OL perpendiculaire sur la ligne YZ; je mène ensuite PM perpendiculaire sur AB.

Alors, la ligne OL étant égale à la somme des projections de OM et PM sur elle-même, on a

$$OM \cos \psi + PM \sin \psi = OL.$$

Mais

$$AB \sin \psi = YZ, \quad AB \cos \psi = AY - BZ;$$

donc

$$OM \cdot (AY - BZ) + PM \cdot YZ = OL \cdot AB,$$

ou bien

$$\frac{1}{2}(AM - BM)(AY - BZ) + PM \cdot YZ = \frac{1}{2}(AY + BZ)(AM + BM),$$

(\*) Le lecteur est prié de faire la figure.

et par suite

$$AM \cdot BZ + BM \cdot AY = PM \cdot YZ;$$

d'où l'on tire

$$\cot \lambda \cot \theta + \cot \mu \cot \varphi = 1.$$

Posons  $\cot \lambda = a$ ,  $\cot \mu = b$ ;  $\cot \theta = \alpha$ ,  $\cot \varphi = \beta$ .  
Alors l'équation biangulaire générale de la droite est

$$a\alpha + b\beta = 1.$$

Si la droite est parallèle à AB, on a

$$a = b.$$

Si elle coïncide avec AB, on a

$$a = 0 = b.$$

Donc l'équation d'une parallèle à AB est

$$\alpha + \beta = \text{const.},$$

et celle de AB est

$$\alpha + \beta = \infty.$$

On peut appeler les points A et B les *pôles biangulaires*, et le milieu de AB le *centre biangulaire*.

2. Trouver la forme de l'équation d'une droite passant par le centre biangulaire.

Lorsqu'une ligne passe par le centre, son équation doit être telle que, pour son centre, on ait

$$\alpha = \beta = \infty.$$

Donc

$$\alpha = \frac{1}{a+b} = \beta = \infty.$$

Par suite

$$a + b = 0,$$

et l'équation d'une droite passant par le centre biangulaire est de la forme

$$\alpha - \beta = \text{const.}$$

3. Les équations des lignes droites passant par les pôles biangulaires sont évidemment de la forme

$$\alpha = \text{const.}, \quad \beta = \text{const.}$$

D'ailleurs, l'équation de la droite de l'infini est évidemment

$$\alpha + \beta = 0.$$

4. Trouver la condition pour que deux lignes soient parallèles entre elles.

Soient les deux lignes représentées par les équations

$$a\alpha + b\beta = 1, \quad a'\alpha + b'\beta = 1.$$

Puisque ces lignes sont parallèles, il en résulte que, à leur point d'intersection, on a

$$\alpha + \beta = 0.$$

Donc

$$(a - b)\alpha = 1, \quad (a' - b')\alpha = 1,$$

et l'on trouve, comme condition de parallélisme,

$$a - b = a' - b'.$$

5. Trouver la condition pour que deux droites soient perpendiculaires.

Soient  $\alpha = k$ ,  $\beta = k'$  les équations des lignes menées respectivement par les points A et B parallèlement aux lignes

$$a\alpha + b\beta = 1, \quad a'\alpha + b'\beta = 1,$$

à l'intersection de la première et de la troisième de ces lignes; on a

$$\alpha + \beta = 0;$$

il en est de même pour l'intersection de la seconde et de la quatrième. On a donc

$$(a-b)k = 1, \quad (b'-a')k' = 1.$$

Mais on a évidemment  $kk' = 1$ . Donc la condition de perpendicularité est

$$(a-b)(a'-b') = -1.$$

6. L'équation d'une ligne passant par les deux points  $(\alpha, \beta)$ ,  $(\alpha_1, \beta_1)$  est évidemment

$$\frac{\alpha' - \alpha}{\alpha_1 - \alpha} = \frac{\beta' - \beta}{\beta_1 - \beta}.$$

7. Trouver l'inclinaison d'une ligne sur la ligne des pôles biangulaires.

Soit l'équation de la droite

$$a\alpha + b\beta = 1,$$

et soit  $\psi$  l'angle LOA.

La ligne menée par le pôle biangulaire parallèlement à la ligne proposée a pour équation  $\tan\psi = \alpha$ . Ces deux lignes se coupant sur la ligne de l'infini, dont l'équation est  $\alpha + \beta = 0$ , on déduira de ces trois équations

$$\cot\psi = a - b.$$

Les résultats obtenus dans les art. 4 et 5 sont des conséquences de cette expression de  $\cot\psi$ .

8. Trouver l'équation de la tangente à une courbe.

D'après l'observation de l'art. 6, il est évident que l'équation de la tangente en un point  $(\alpha, \beta)$  d'une courbe est

$$\frac{\alpha' - \alpha}{d\alpha} = \frac{\beta' - \beta}{d\beta}.$$

Si l'équation de la courbe est de la forme  $F(\alpha, \beta) = 0$ , celle de la tangente sera

$$(\alpha' - \alpha) \frac{dF}{d\alpha} + (\beta' - \beta) \frac{dF}{d\beta} = 0.$$

9. Trouver l'équation de la normale en un point d'une courbe.

Puisque la normale passe par le point  $(\alpha, \beta)$ , son équation est comprise dans la forme

$$a(\alpha' - \alpha) + b(\beta' - \beta) = 0,$$

ou bien

$$\frac{a\alpha'}{a\alpha + b\beta} + \frac{b\beta'}{a\alpha + b\beta} = 1.$$

De plus, l'équation de la tangente peut s'écrire

$$\frac{\alpha' d\beta}{\alpha d\beta - \beta d\alpha} + \frac{\beta' d\alpha}{\beta d\alpha + \alpha d\beta} = 1.$$

La condition de perpendicularité est

$$\frac{a - b}{a\alpha + b\beta} \frac{d\alpha + d\beta}{\alpha d\beta - \beta d\alpha} = -1,$$

ou bien

$$b[d\beta(1 - \alpha\beta) + d\alpha(1 + \beta^2)] = a[d\alpha(1 - \alpha\beta) + d\beta(1 + \alpha^2)].$$

L'équation de la normale est donc

$$\frac{\alpha' - \alpha}{d\alpha(1 - \alpha\beta) + d\beta(1 + \alpha^2)} + \frac{\beta' - \beta}{d\beta(1 - \alpha\beta) + d\alpha(1 + \beta^2)} = 1,$$

ou bien, en employant les coefficients aux différences partielles,

$$\frac{\alpha' - \alpha}{(\alpha\beta - 1) \frac{dF}{d\beta} + (1 + \alpha^2) \frac{dF}{d\alpha}} = \frac{\beta' - \beta}{(\alpha\beta - 1) \frac{dF}{d\alpha} + (1 + \beta^2) \frac{dF}{d\beta}}.$$

10. Prenons pour exemple le cercle ayant pour diamètre la distance entre les deux pôles biangulaires. L'équation de ce cercle est  $\alpha\beta = 1$ .

L'équation de la tangente en un point  $(\alpha, \beta)$  est, d'après la formule de l'art. 8,

$$\frac{\alpha'}{\alpha} + \frac{\beta'}{\beta} = 2,$$

et celle de la normale, d'après la formule de l'art. 9, est

$$\alpha' - \beta' = \alpha - \beta,$$

qui représente, comme on devait s'y attendre, une droite passant par le centre biangulaire.

Comme second exemple, proposons-nous de trouver la tangente à la courbe

$$\theta^2 - \varphi^2 = 1,$$

au point pour lequel  $\varphi = 0$ .

Puisque

$$\frac{dF}{d\alpha} = \frac{dF}{d\theta} \frac{d\theta}{d\alpha} = -\sin^2\theta \frac{dF}{d\theta} = -2\theta \sin^2\theta,$$

$$\frac{dF}{d\beta} = \frac{dF}{d\varphi} \frac{d\varphi}{d\beta} = -\sin^2\varphi \frac{dF}{d\varphi} = \varphi \sin^2\varphi,$$

l'équation de la tangente en un point est

$$\theta \sin^2\theta (\alpha' - \alpha) = \varphi \sin^2\varphi (\beta' - \beta)$$

ou

$$\theta \sin^2\theta . \alpha' - \theta \sin\theta \cos\theta = \varphi \sin^2\varphi . \beta' - \varphi \sin\varphi \cos\varphi.$$

Si l'on pose  $\varphi = 0$ , on a  $\theta = \pm 1$ , et l'équation de la tangente devient

$$\alpha' = \pm \cot 1.$$

Ce résultat prouve que, au pôle A, par lequel passe la



courbe, il y a deux tangentes inclinées chacune d'un angle  $\alpha$  sur la ligne AB, et de côtés opposés de cette ligne.

11. Trouver l'équation de l'asymptote à une courbe.

On combinera l'équation de la courbe de l'infini, ou  $\alpha + \beta = 0$  avec l'équation  $F(\alpha, \beta) = 0$ , ce qui déterminera  $\alpha$  et  $\beta$ ; ces valeurs, si elles sont possibles, seront substituées à  $\alpha$  et à  $\beta$  dans l'équation

$$(\alpha' - \alpha) \frac{dF}{d\alpha} + (\beta' - \beta) \frac{dF}{d\beta} = 0,$$

et si l'équation résultante représente une ligne à distance finie, cette ligne est une asymptote.

Prenons par exemple l'hyperbole

$$\alpha^2 + \beta^2 = \epsilon^2,$$

dans laquelle  $\epsilon$  est une constante. Combinant l'équation de la courbe avec l'équation  $\alpha + \beta = 0$ , on a

$$\alpha = \pm \frac{\epsilon \sqrt{2}}{2} = -\beta.$$

L'équation de la tangente est

$$\alpha(\alpha' - \alpha) + \beta(\beta' - \beta) = 0,$$

ou

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' = \epsilon^2.$$

On en déduit, pour l'équation des asymptotes,

$$\alpha' - \beta' = \pm \epsilon \sqrt{2},$$

résultat qui prouve que les asymptotes passent par le centre.

Prenons pour second exemple

$$\theta^2 - \varphi^2 = 1.$$

Pour avoir l'asymptote, on doit poser

$$\alpha + \beta = 0, \quad \cot \theta + \cot \varphi = 0, \quad \varphi = n\pi - \theta.$$

Portant dans l'équation de la courbe, on aura

$$\theta^2 - (n\pi - \theta)^2 = 1, \quad \theta = \frac{n^2\pi^2 + 1}{2n\pi}, \quad \varphi = \frac{n^2\pi^2 - 1}{2n\pi}.$$

Par suite, en se rapportant à l'équation de la tangente donnée dans l'article 10, on aura, pour l'équation des asymptotes,

$$\begin{aligned} & (n^2\pi^2 + 1) \sin^2 \frac{n^2\pi^2 - 1}{2n\pi} \alpha' - (n^2\pi^2 - 1) \sin^2 \frac{n^2\pi^2 - 1}{2n\pi} \beta' \\ &= \cot \frac{n^2\pi^2 + 1}{2n\pi} \left[ (n^2\pi^2 + 1) \sin^2 \frac{n^2\pi^2 + 1}{2n\pi} \right. \\ & \quad \left. + (n^2\pi^2 - 1) \sin^2 \frac{n^2\pi^2 - 1}{2n\pi} \right]. \end{aligned}$$

Cette équation, suivant que  $n$  est pair ou impair, peut être remplacée par les équations

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{n^2\pi^2} + 1 \right) \alpha' + \left( \frac{1}{n^2\pi^2} - 1 \right) \beta' &= 2 \cot \frac{1}{2n\pi}, \\ \left( \frac{1}{n^2\pi^2} + 1 \right) \alpha' + \left( \frac{1}{n^2\pi^2} - 1 \right) \beta' &= -2 \operatorname{tang} \frac{1}{2n\pi}. \end{aligned}$$

12. Comme exercice des coordonnées biangulaires, cherchons à tracer la courbe donnée par l'équation

$$\theta^2 + \varphi^2 = 1.$$

L'équation de la tangente en un point  $(\theta, \varphi)$  est

$$\theta \sin^2 \theta \cdot \alpha' + \varphi \sin^2 \varphi \cdot \beta' = \theta \sin \theta \cos \theta + \varphi \sin \varphi \cos \varphi.$$

Lorsque  $\theta = \pm 1$ , ce qui est sa plus grande valeur absolue, on a  $\varphi = 0$ , et l'équation de la tangente devient

$$\alpha' = \pm \cot 1, \quad \text{ou} \quad \theta' = \pm 1.$$

( 131 )

De même, les équations de la tangente, pour  $\varphi = \pm 1$ , sont

$$\varphi' = \pm 1.$$

Pour déterminer la position des asymptotes, s'il y en a, on doit prendre la relation

$$\alpha + \beta = 0 \quad \text{ou} \quad \cot \theta + \cot \varphi = 0,$$

et par suite

$$\varphi = n\pi - \theta.$$

On en déduit, en portant dans l'équation de la courbe,

$$\theta^2 - n\pi\theta = \frac{1}{2}(1 - n^2\pi^2),$$

ou

$$\theta = \frac{1}{2} [n\pi \pm (2 - n^2\pi^2)^{\frac{1}{2}}].$$

Pour que  $\theta$  soit possible, il est évident que  $n$  ne peut être que nul, puisqu'il ne peut être fractionnaire; donc

$$\theta = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \varphi = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Portant ces valeurs de  $\theta$  et de  $\varphi$  dans l'équation de la tangente, on trouve, pour l'équation des asymptotes,

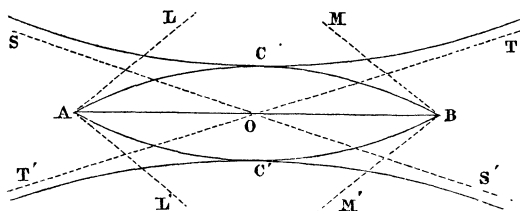
$$\alpha' - \beta' = \mp 2 \cot \frac{1}{\sqrt{2}},$$

résultat qui montre que les deux asymptotes passent par le centre biangulaire.

De plus, par l'article 7, on voit que les asymptotes sont inclinées sur la ligne des pôles, et de côtés opposés, d'angles égaux chacun à  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ .

La forme de la courbe, comme on le voit, peut être

facilement donnée par la figure ci-dessous : AL et AL' sont les tangentes en A ; BM, BM' celles en B ; SOS', TOT' sont les asymptotes.



On peut observer que, si  $\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$  ou  $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ .  
Les coordonnées  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  représentent le point C ; les coordonnées  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $-\frac{1}{\sqrt{2}}$  représentent le point à l'infini T.

D'ailleurs, si  $\theta = \varphi$ , ce qui est le cas du point C, l'équation de la tangente devient

$$\alpha' + \beta' = 2 \cot \theta;$$

et par suite la tangente est parallèle à AB.

13. Trouver les coordonnées biangulaires du centre de courbure d'une courbe en un de ses points.

Soient  $U = \frac{dF}{dx}$ ,  $V = \frac{dF}{d\beta}$ , les équations de la normale peuvent s'écrire

$$\alpha' - \alpha = Lr, \quad \beta' - \beta = Mr,$$

en posant

$$L = \alpha(\alpha U + \beta V) + U - V,$$

$$M = \beta(\beta V + \alpha U) + V - U.$$

Différentiant les équations de la normale dans l'hypo-

thèse que  $d\alpha'$  et  $d\beta'$  sont nuls tous les deux, on a

$$-d\alpha = Ldr + rdL,$$

$$-d\beta = Mdr + rdM,$$

et par suite

$$\frac{\alpha' - \alpha}{L} = \frac{\beta' - \beta}{M} = \frac{Mdx - Ld\beta}{LdM - MdL}.$$

En effectuant les différentiations indiquées, remplaçant dans le résultat  $d\alpha$ ,  $d\beta$  par leurs proportionnels  $U$ ,  $-V$ , et posant

$$\frac{dU}{d\alpha} = u, \quad \frac{dV}{d\beta} = v, \quad \frac{dU}{d\beta} = w = \frac{dV}{d\alpha},$$

on arrive, par une marche très-simple, aux équations

$$\begin{aligned} \frac{\alpha - \alpha'}{\alpha(\alpha U + \beta V) + U - V} &= \frac{\beta - \beta'}{\beta(\beta V + \alpha U) + V - U} \\ &= \frac{(U - V)^2 + (\alpha U + \beta V)^2}{\left\{ (\alpha U + \beta V)[(U - V)^2 + (\alpha U + \beta V)^2] \right. \\ &\quad \left. + (\alpha^2 + \beta^2)(Uv^2 + Vu^2 - 2UVw) \right\}}, \end{aligned}$$

qui déterminent les coordonnées biangulaires du centre de courbure.

Prenons, par exemple, l'équation  $\alpha\beta = 1$ ; alors

$$U = \beta, \quad V = \alpha, \quad u = 0, \quad v = 0, \quad w = 1;$$

donc

$$\frac{\alpha - \alpha'}{\alpha + \beta} = \frac{\beta - \beta'}{\alpha + \beta}, \quad \text{ou} \quad \alpha' - \beta' = \alpha - \beta.$$

La forme de cette équation nous montre que le centre de courbure est sur une ligne qui passe par le centre biangulaire.

En outre, le dénominateur du troisième membre des équations qui déterminent les coordonnées du centre de

courbure est nul, comme il est facile de le voir. Par conséquent,

$$\alpha' = \infty, \quad \beta' = \infty.$$

Le centre de courbure coïncide donc avec le centre biangulaire; ce qui est évident, puisque la courbe est un cercle dont le centre coïncide avec le centre biangulaire.

14. Tangente indéterminée. — Supposons que, pour un couple particulier de valeurs de  $\theta$  et  $\varphi$ ,  $\frac{dF}{d\theta}$ ,  $\frac{dF}{d\varphi}$  soient nuls tous les deux. Alors, en supposant que les premiers coefficients aux différences partielles qui ne s'annulent pas soient de l'ordre  $n$ , on a

$$\left( d\theta \frac{d}{d\theta} + d\varphi \frac{d}{d\varphi} \right)^n F = 0.$$

De plus

$$d\alpha = -\operatorname{cosec}^2 \theta d\theta, \quad d\beta = -\operatorname{cosec}^2 \varphi d\varphi.$$

Par suite, l'équation de la tangente en un point peut s'écrire

$$(\alpha' - \alpha) \frac{\sin^2 \theta}{d\theta} = (\beta' - \beta) \frac{\sin^2 \varphi}{d\varphi},$$

et les équations des tangentes au point  $(\theta, \varphi)$  sont renfermées dans l'équation

$$\left[ (\alpha' - \alpha) \sin^2 \theta \frac{d}{d\theta} + (\beta' - \beta) \sin^2 \varphi \frac{d}{d\varphi} \right]^n F = 0.$$

Il faut remarquer qu'il n'est pas nécessairement vrai, comme dans la proposition correspondante en coordonnées bilinéaires, que, réciproquement, s'il y a plusieurs tangentes en un point, on a

$$\frac{dF}{d\theta} = 0, \quad \frac{dF}{d\varphi} = 0.$$

(Voyez, par exemple, la courbe étudiée dans l'article 12.)

Cherchons les équations des tangentes à la courbe

$$F = [(\theta - \theta_1)^2 + (\varphi - \varphi_1)^2]^2 - (\theta - \theta_1)^2 + (\varphi - \varphi_1)^2 = 0$$

au point  $(\theta_1, \varphi_1)$ .

Il est facile de voir que l'on a

$$\frac{dF}{d\theta} = 0, \quad \frac{dF}{d\varphi} = 0, \quad \frac{d^2F}{d\theta^2} = -2, \quad \frac{d^2F}{d\theta d\varphi} = 0, \quad \frac{d^2F}{d\varphi^2} = 2.$$

L'équation des tangentes correspondantes est

$$(\alpha' \sin \theta_1 - \cos \theta_1)^2 \sin^2 \theta_1 = (\beta' \sin \varphi_1 - \cos \varphi_1)^2 \sin^2 \varphi_1.$$

Cette équation est équivalente aux deux suivantes :

$$(1) \quad \alpha' \sin^2 \theta_1 - \beta' \sin^2 \varphi_1 = \cos \theta_1 \sin \theta_1 - \sin \varphi_1 \cos \varphi_1,$$

$$(2) \quad \alpha' \sin^2 \theta_1 + \beta' \sin^2 \varphi_1 = \cos \theta_1 \sin \theta_1 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_1.$$

Supposons  $\theta_1 = \varphi_1$ , les équations (1) et (2) deviennent

$$\alpha' - \beta' = 0, \quad \alpha' + \beta' = 2 \cot \theta_1.$$

Si, en outre,  $\theta_1 = 0$ , on voit que les équations des tangentes au point  $(0, 0)$  de la courbe

$$(\theta^2 + \varphi^2)^2 = \theta^2 - \varphi^2$$

sont

$$\alpha' - \beta' = 0, \quad \alpha' + \beta' = \infty,$$

la première représentant une ligne passant par le centre biangulaire et perpendiculaire sur la ligne des pôles, la seconde représentant la ligne des pôles elle-même.

---