J. Bourget

Note sur la racine carrée des nombres approchés

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 9 (1870), p. 541-545
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1870_2_9__541_0>

NOTE SUR LA RACINE CARRÉE DES NOMBRES APPROCHÉS;

Par M. J. BOURGET.

On a souvent à extraire la racine carrée d'un nombre entier ou décimal connu approximativement avec un certain nombre de figures exactes. (Nous entendons par là que l'erreur de ce nombre est moindre qu'une unité de l'ordre du dernier chiffre écrit à droite.)

Il semble résulter de la règle habituelle donnée pour l'extraction que le nombre des chiffres certains à la racine est moindre que celui du nombre proposé, puisque chaque chiffre de la racine correspond à une tranche de deux chiffres dans le nombre proposé.

Voici un théorème général très-simple et trop peu connu des élèves qui montre l'inexactitude de cette conclusion (*).

Théorème. — *On peut compter en général à la racine sur autant de chiffres exacts qu'il y en a dans le nombre proposé.*

Lemme. — Si le nombre dont on extrait la racine n'est pas entier, on le ramènera à un nombre entier en le multipliant par une des puissances paires de 10.

Pour la clarté de la démonstration du théorème, il est bon de distinguer deux cas.

(*) Nous avons voulu, en rédigeant cet article, appeler l'attention des élèves sur une règle facile à retenir pour résoudre certaines questions posées dans les examens. Il n'y a rien de nouveau dans notre énoncé, ni dans notre démonstration.

§ I. — *Nombre A approché par défaut.*

Soit α l'erreur commise dans le nombre, e celle de la racine, nous aurons

$$(1) \qquad e = \sqrt{A+\alpha} - \sqrt{A} = \frac{\alpha}{\sqrt{A+\alpha}+\sqrt{A}} < \frac{\alpha}{2\sqrt{A}}.$$

Désignons par p le premier chiffre de A et distinguons deux cas pour le nombre des chiffres entiers.

1° A *possède* $2n$ *chiffres à la partie entière.* — Alors on a

$$A \geqq p\,10^{2n-1};$$

par suite,

$$e < \frac{\alpha}{2.10^{n-1}\sqrt{10p}}.$$

Donc :

(a). Si $\alpha < \frac{1}{2}$, on aura

$$e < \frac{1}{4.10^{n-1}\sqrt{10p}} < \frac{1}{10^n}$$

(b). Si $\alpha < 1$, on aura

$$e < \frac{1}{2.10^{n-1}\sqrt{10p}},$$

et si $p \geqq 3$, on aura encore

$$e < \frac{1}{10^n}.$$

Par conséquent, l'erreur n'affectera pas le $n^{ième}$ chiffre décimal de la racine; comme d'ailleurs elle a n chiffres à la partie entière, on pourra compter sur $2n$ chiffres à la racine.

(c). Si $\alpha < 5$, on aura

$$e < \frac{1}{4.10^{n-2}\sqrt{10p}} < \frac{1}{10^{n-1}}.$$

(d). Si $\alpha < 10$, on aura

$$e < \frac{1}{2.10^{n-2}\sqrt{10p}},$$

et si $p \geqq 3$, on aura encore

$$e < \frac{1}{10^{n-1}}.$$

Par conséquent, dans l'un et l'autre cas, l'erreur n'affectera pas le $(n-1)^{ième}$ chiffre décimal; d'ailleurs la partie entière de la racine a n chiffres, donc on pourra compter sur $2n-1$ chiffres à la racine, c'est-à-dire sur autant qu'il y en a de certains dans le nombre proposé.

2° A *possède* $(2n+1)$ *chiffres à la partie entière.* — Dans cette hypothèse

$$A > p\, 10^{2n};$$

par suite,

$$e < \frac{\alpha}{2.10^{n}\sqrt{p}}.$$

Donc :

(a). Si $\alpha < \frac{1}{2}$, on aura

$$e < \frac{1}{4.10^{n}\sqrt{p}} < \frac{1}{10^{n}}.$$

(b). Si $\alpha < 1$, on aura

$$e < \frac{1}{2.10^{n}\sqrt{p}} < \frac{1}{10^{n}},$$

et dans les deux cas l'erreur n'affectera pas le $n^{ième}$ chiffre décimal, et comme la partie entière de la racine a $n+1$ chiffres, il y aura en tout $2n+1$ chiffres sûrs à la racine.

(c). Si $\alpha < 5$, on aura

$$e < \frac{1}{4.10^{n-1}\sqrt{p}} < \frac{1}{10^{n-1}}.$$

(*d*). Si $\alpha < 10$, on aura

$$e < \frac{1}{2.10^{n-1}\sqrt{p}} < \frac{1}{10^{n-1}},$$

et, dans les deux cas, l'erreur n'affectera pas le $(n-1)^{\text{ième}}$ chiffre décimal; donc la racine aura autant de chiffres sûrs que le nombre proposé.

§ II. — *Nombre* A *approché par défaut.*

Dans cette hypothèse

$$e = \sqrt{A} - \sqrt{A-\alpha} = \frac{\alpha}{\sqrt{A}+\sqrt{A-\alpha}} < \frac{\alpha}{2\sqrt{A-\alpha}},$$

et, comme en exceptant le cas particulier où A serait une puissance de 10, on peut poser généralement

$$A \geqq p\,10^{m-1} + \alpha,$$

en désignant par m le nombre des chiffres, on a encore

$$e < \frac{\alpha}{2\sqrt{p}\sqrt{10^{m-1}}}.$$

On peut donc répéter maintenant les raisonnements du paragraphe précédent; par suite, les conclusions sont les mêmes.

Remarque I. — Le théorème général présente l'exception suivante qu'il est bon de signaler :

Si le nombre des chiffres du nombre proposé est pair et que le premier chiffre soit inférieur à* 3, *le nombre des chiffres sûrs de la racine est égal à celui du nombre donné moins un.

Remarque II. — Voici pourquoi nous avons examiné le cas où $\alpha < 5$ et celui où $\alpha < 10$. Si le nombre des chiffres décimaux du nombre donné est impair, si, par exemple, on prend $\sqrt{2} = 1,414$, le nombre entier dont on extraira ensuite la racine pour avoir $\sqrt{\sqrt{2}}$ sera approché à moins de 5 ou 10 unités du dernier ordre. Ce cas est donc aussi important que le premier où $\alpha < \frac{1}{2}$ ou 1.

Remarque III. — On trouve de nombreuses applications de ce théorème. Nous citerons en particulier : le calcul des moyennes géométriques dans la recherche de π par la méthode des isopérimètres, le calcul des radicaux superposés que l'on rencontre dans les expressions des côtés des polygones réguliers C_n; voici quelques-unes de ces expressions :

$$C_5 = \frac{R}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}},$$

$$C_8 = R\sqrt{2 - \sqrt{2}},$$

$$C_{12} = R\sqrt{2 - \sqrt{3}},$$

$$C_{15} = \frac{R}{4}\left(\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{15} + \sqrt{3}\right),$$

$$C_{16} = R\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}},$$

$$C_{24} = R\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}},$$

$$C_{32} = R\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}.$$

Remarque IV. — Nous ne nous sommes occupé que de la racine carrée, le théorème général est *à fortiori* vrai pour les racines d'un indice supérieur. On ferait facilement le raisonnement dans le cas de la racine cubique.

Remarque V. — On pourrait tirer une démonstration plus simple du même théorème de la théorie des erreurs relatives; mais elle serait moins directe.