NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

H. LEMONNIER

Solution d'une question géométrique

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 9 (1870), p. 532-537

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1870_2_9__532_1>

SOLUTION D'UNE QUESTION GÉOMÉTRIQUE;

PAR M. H. LEMONNIER,
Professeur de Mathématiques spéciales au lycée Corneille.

Un cône du second degré étant donné par son sommet et une section plane, en construire les axes au moyen de coniques.

1. Soient considérés des surfaces homofocales et les cônes circonscrits à ces surfaces d'un même sommet $P(x_1 y_1 z_1)$.

L'une des surfaces ayant pour équation

$$\frac{x^2}{a^2+u}+\frac{y^2}{b^2+u}+\frac{z^2}{c^2+u}=1,$$

si le point M(xyz) est la trace, sur le plan polaire de P, d'un axe du cône circonscrit à la surface, on aura les équations

$$\frac{x-x_1}{\dfrac{x}{a^2+u}}=\frac{y-y_1}{\dfrac{y}{b^2+u}}=\frac{z-z_1}{\dfrac{z}{c^2+u}},$$

$$\frac{xx_1}{a^2+u}+\frac{yy_1}{b^2+u}+\frac{zz_1}{c^2+u}-1=0,$$

puisque la droite PM est perpendiculaire au plan polaire de M par rapport au cône, et que ce plan est le plan polaire par rapport à la surface.

L'élimination de u entre les deux premières équations donne

$$\frac{a^2-b^2}{\dfrac{x}{x-x_1}-\dfrac{y}{y-y_1}}=\frac{b^2-c^2}{\dfrac{y}{y-y_1}-\dfrac{z}{z-z_1}},$$

d'où

$$\frac{(b^2-c^2)x_1}{x-x_1}+\frac{(c^2-a^2)y_1}{y-y_1}+\frac{(a^2-b^2)z_1}{z-z_1}=0.$$

Cette équation est celle du cône des normales menées par le point P aux surfaces considérées, et à celles qui leur sont homothétiques et concentriques.

On tire des mêmes équations, en ayant égard à la troisième,

$$\frac{x-x_1}{\dfrac{x}{a^2+u}}=\frac{y-y_1}{\dfrac{y}{b^2+u}}=\frac{z-z_1}{\dfrac{z}{c^2+u}}$$

$$=\frac{x_1(x-x_1)+y_1(y-y_1)+z_1(z-z_1)}{1}$$

$$=\frac{a^2+u}{\left(\dfrac{x}{x-x_1}\right)}=\frac{b^2+u}{\left(\dfrac{y}{y-y_1}\right)}=\frac{(a^2-b^2)(x-x_1)(y-y_1)}{x_1(y-y_1)-y_1(x-x_1)};$$

de sorte qu'on a

$$[x_1(y-y_1)-y_1(x-x_1)][x_1(x-x_1)+y_1(y-y_1)+z_1(z-z_1)]$$
$$=(a^2-b^2)(x-x_1)(y-y_1),$$

ce qui donne un second cône contenant les mêmes axes.

On en a deux autres analogues par les équations

$$[y_1(z-z_1)-z_1(y-y_1)][x_1(x-x_1)+y_1(y-y_1)+z_1(z-z_1)]$$
$$=(b^2-c^2)(y-y_1)(z-z_1),$$
$$[z_1(x-x_1)-x_1(z-z_1)][x_1(x-x_1)+y_1(y-y_1)+z_1(z-z_1)]$$
$$=(c^2-a^2)(z-z_1)(x-x_1).$$

Ces cônes ne changent pas quand on passe d'une surface à une surface homofocale.

On en peut conclure que les axes sont de directions constantes; que, par suite, ce sont les normales aux trois surfaces homofocales qui passent en P.

2. Si l'on fait $c=0$ et $u=0$, le cône circonscrit devient celui qui a pour sommet le point P et passe par l'ellipse dont les équations sont

$$z=0, \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Le changement de b^2 en $-b^2$ fera passer de ce cas à celui d'une hyperbole.

En faisant $c=0$ et $z=0$ dans les équations des différents cônes considérés ci-dessus, on obtient

$$\frac{b^2x_1}{x-x_1}-\frac{a^2y_1}{y-y_1}+\frac{(a^2-b^2)z_1}{-z_1}=0,$$

ou

$$(a^2-b^2)xy-a^2x_1y+b^2y_1x=0,$$
$$[x_1(x-x_1)+y_1(y-y_1)-z_1^2][x_1(y-y_1)-y_1(x-x_1)]$$
$$=(a^2-b^2)(x-x_1)(y-y_1),$$
$$[x_1(x-x_1)+y_1(y-y_1)-z_1^2]\,y=b^2(y-y_1),$$
$$[x_1(x-x_1)+y_1(y-y_1)-z_1^2]\,z=a^2(x-x_1).$$

On a par là quatre coniques sur lesquelles sont les traces des axes du cône sur le plan de la conique donnée sur le plan xy.

Ces coniques sont chacune d'une détermination géométrique facile.

La première n'est autre chose que l'hyperbole qui est le lieu des pieds des normales abaissées du point $p(x_1y_1)$ sur l'ellipse et les lignes du second degré qui lui sont homothétiques et concentriques : résultat facile à prévoir. Car si M est la trace d'un axe du cône sur le plan de l'ellipse, son plan polaire par rapport au cône étant perpendiculaire à PM, la trace de ce plan, qui est la polaire de M par rapport à la conique, est perpendiculaire à pM, projection de PM; c'est-à-dire que le lieu de M est celui des points tels que la polaire de chacun d'eux est perpendiculaire à la droite qui le joint au point p; c'est-à-dire l'hyperbole en question.

La seconde conique passe en p, projection du sommet P du cône, et elle y est tangente à op. Elle passe encore aux deux points où les droites $(x - x_1 = 0)$, $(y - y_1 = 0)$ rencontrent la droite

$$[x_1(x - x_1) + y_1(y - y_1) + z_1(z - z_1) - z_1^2 = 0],$$

qui est la trace sur le plan xy du plan mené en P perpendiculairement à OP. On connaît ainsi un triangle inscrit à la conique et la tangente en l'un des sommets. Pour achever la détermination de la conique, et pouvoir la construire, il suffit d'observer que le produit des distances de chaque point à la tangente op et au côté opposé, est avec le produit des distances aux deux autres droites dans un rapport égal à $\frac{a^2 - b^2}{op^2}$.

L'équation de la troisième conique peut se mettre sous la forme

$$y[x_1(x-x_1)+y_1(y-y_1)-z_1^2-b^2]+b^2y_1=0.$$

Cette conique a donc ox pour asymptote. La seconde asymptote a pour équation

$$x_1(x-x_1)+y_1(y-y_1)-z_1^2-b^2=0,$$

c'est-à-dire

$$x\cos\varphi+y\sin\varphi=\frac{\mathrm{OP}^2+b^2}{op},$$

en désignant par φ un angle de direction de op à l'égard de ox. Il est aisé de la construire. Elle passe en outre au point où la parallèle à ox, menée en p, rencontre la trace sur le plan xy du plan perpendiculaire à OP au sommet du cône. La construction de l'hyperbole suit de là immédiatement.

La dernière ligne est une hyperbole analogue, *mutatis mutandis*.

3. On ramène au problème précédent celui de construire les axes d'une surface du second degré, quand on en connaît le centre, une section plane dont le plan ne passe pas en ce centre, et un point de la section centrale parallèle.

Supposons d'abord que la surface soit un hyperboloïde. Soient conçus le cône asymptote et sa section par le plan de la conique donnée. Si a et A sont deux rayons parallèles dans la section centrale et la section donnée de l'hyperboloïde, et α le rayon de même direction dans la section du cône, on aura

$$\alpha^2=\mathrm{A}^2-a^2.$$

C'est une relation par laquelle on construira un point de cette dernière correspondant au point donné; par suite, on connaîtra cette section du cône, et il ne s'agira plus que d'avoir les axes mêmes du cône. Quant à la première hyperbole, celle qui concerne les pieds des normales, elle sera la même pour la section donnée que pour la base du cône asymptote.

Au cas d'un ellipsoïde, le cône asymptote devient imaginaire; les considérations précédentes n'en subsistent pas moins. Ci-dessus, les quantités désignées par α^2, A^2, a^2 peuvent être négatives aussi bien que positives. Si dans notre analyse il y a à remplacer des quantités positives a^2 et b^2 par des quantités négatives $-a'^2$, $-b'^2$, il s'ensuivra comme hyperbole des *normales* la même hyperbole que pour $a^2 = a'^2$ et $b^2 = b'^2$; puis, au lieu de la conique donnée par

$$y[x_1(x - x_1) + y_1(y - y_1) - z_1^2 - b^2] + b^2 y_1 = 0,$$

on aura celle que détermine l'équation

$$y[x_1(x - x_1) + y_1(y - y_1) - z_1^2 + b'^2] - b'^2 y_1 = 0,$$

laquelle se construira d'une façon toute semblable.

Il est à remarquer que le problème traité autrement par M. Paul Serret (*Annales*, août 1868), celui de construire les axes d'une surface du second degré, quand on en connaît trois diamètres conjugués, rentre dans le précédent, car la section du cône asymptote par le plan tangent à une extrémité de l'un de ces diamètres peut alors se construire.