NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

H. LEMONNIER

Étude analytique sur la cyclide

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 9 (1870), p. 514-527

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1870_2_9__514_0>

ÉTUDE ANALYTIQUE SUR LA CYCLIDE;

PAR M. H. LEMONNIER.

Soit considérée l'enveloppe d'une sphère, quand le centre se meut sur une conique et que le rayon est proportionnel à la distance du centre à une droite D située dans le plan de la conique.

Prenons pour la conique, les coordonnées étant rectangulaires, les équations

$$\gamma = 0, \quad \frac{\alpha^2}{A} + \frac{\beta^2}{B} = 1;$$

pour la droite fixe,

$$z = 0, \quad mx + ny + p = 0;$$

et pour la sphère mobile,

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + z^2 = (m\alpha + n\beta + p)^2.$$

On déduit de là, à l'égard de l'enveloppe,

$$(x-\alpha)\,d\alpha + (y-\beta)\,d\beta + (m\alpha + n\beta + p)(m\,d\alpha + n\,d\beta) = 0,$$

$$\frac{\alpha}{A}\,d\alpha + \frac{\beta}{B}\,d\beta = 0,$$

ce qui donne pour déterminer la surface

$$\frac{x - \alpha + m(m\alpha + n\beta + p)}{\frac{\alpha}{A}} = \frac{y - \beta + n(m\alpha + n\beta + p)}{\frac{\beta}{B}},$$

$$\frac{\alpha^2}{A} + \frac{\beta^2}{B} = 1, \quad (x-a)^2 + (y-\beta)^2 + z^2 = (m\alpha + n\beta + p)^2.$$

Voyons à quelles conditions les plans des intersections successives passent par une même droite D'.

L'équation générale du plan d'une caractéristique peut se mettre sous la forme

$$\frac{(x + mp)\mathrm{A}}{\alpha} + (m^2 - 1)\mathrm{A} + mn\mathrm{A}\frac{\beta}{\alpha}$$
$$= \frac{(y + np)\mathrm{B}}{\beta} + (n^2 - 1)\mathrm{B} + mn\mathrm{B}\frac{\alpha}{\beta}.$$

Pour que le plan passe par une droite fixe, il faudra d'abord avoir

$$mn = 0,$$

d'où, soit

$$m = 0,$$

soit

$$n = 0.$$

Si l'on prend $n = 0$, il faudra, en outre, que

$$(m^2 - 1)\mathrm{A} = -\mathrm{B} \quad \text{ou} \quad m^2 = \frac{\mathrm{A} - \mathrm{B}}{\mathrm{A}},$$

et alors la droite commune est donnée par

$$x + mp = 0, \quad y = 0.$$

Si l'on prend $m = 0$, il faut

$$-\mathrm{A} = (n^2 - 1)\mathrm{B}, \quad \text{d'où} \quad n^2 = \frac{\mathrm{B} - \mathrm{A}}{\mathrm{B}},$$

et alors on a pour la droite

$$x = 0, \quad y + np = 0.$$

Quand la conique est une ellipse, si l'on a $\mathrm{A} > \mathrm{B}$, il faudra donc prendre

$$n = 0, \quad m^2 = \frac{\mathrm{A} - \mathrm{B}}{\mathrm{A}}.$$

Quand c'est une hyperbole pour laquelle on a $\mathrm{A} > 0$,

$B < 0$, il y aura à prendre soit

$$n = 0, \quad m^2 = \frac{A - B}{A},$$

soit

$$m = 0, \quad n^2 = \frac{B - A}{B}.$$

D'après cela, lorsque la directrice du centre est une ellipse, la droite doit être perpendiculaire à l'axe focal, et le rapport m du rayon de la sphère à la distance entre son centre et la droite fixe doit être l'excentricité de l'ellipse.

Lorsque la directrice est une hyperbole, la droite fixe doit être perpendiculaire à l'un de ses axes. Si elle l'est à l'axe focal, le rapport est l'excentricité de l'hyperbole. Si elle est perpendiculaire à l'axe non focal, le rapport est l'excentricité de l'hyperbole conjuguée; mais, dans ce cas, on verra plus loin que la surface devient imaginaire.

Supposons d'abord

$$n = 0, \quad m^2 = \frac{A - B}{A}, \quad A > B.$$

Nous aurons pour la surface

$$\frac{x - \alpha + m(m\alpha + p)}{\frac{\alpha}{A}} = \frac{y - \beta}{\frac{\beta}{B}},$$

$$\frac{\alpha^2}{A} + \frac{\beta^2}{B} = 1, \quad (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = (m\alpha + p)^2;$$

d'où l'on tire

$$\frac{x + mp}{\frac{\alpha}{A}} = \frac{y}{\frac{\beta}{B}} \; \frac{\sqrt{A}(x + mp)}{\frac{\alpha}{\sqrt{A}}} = \frac{\sqrt{B}y}{\frac{\beta}{\sqrt{B}}} = \frac{\sqrt{A(x + mp)^2 + By^2}}{1},$$

de sorte que

$$\alpha = \frac{A(x+mp)}{\sqrt{A(x+np)^2+By^2}}, \quad \beta = \frac{By}{\sqrt{A(x+mp)^2+By^2}}.$$

Et l'on a

$$x^2+y^2+z^2-p^2+\frac{B}{A}\alpha^2+\beta^2-2(mp\alpha+\alpha x+\beta y)=0;$$

par suite,

$$x^2+y^2+z^2-p^2+B\frac{A(x+mp)^2+By^2}{A(x+mp)^2+By^2}$$
$$-2\frac{A(x+mp)^2+By^2}{\sqrt{A(x+mp)^2+By^2}}=0,$$

c'est-à-dire

$$x^2+y^2+z^2-p^2+B=2\sqrt{A(x+mp)^2+By^2},$$

ou

$$(x^2+y^2+z^2-p^2+B)^2=4[A(x+mp)^2+By^2],$$

équation d'une grande simplicité, sous une forme heureuse.

Points de rencontre de la surface avec la droite ($z=0, mx+p=0$), *et avec la droite* ($y=0, x+mp)=0$.

L'on a pour la première

$$\left(\frac{B}{A}\frac{p^2}{m^2}+B+y^2\right)^2=4\left(\frac{B}{A}\frac{p^2}{m^2}+y^2\right)B,$$

d'où

$$\left(\frac{B}{A}\frac{p^2}{m^2}+y^2-B\right)^2=0, \quad y^2=B\frac{A-B-p^2}{A-B};$$

de sorte que si l'on a $B>0$, la droite rencontre ou non la surface suivant que l'on a

$$A-B>p^2$$

ou

$$A - B < p^2;$$

et quand on a $B < 0$, suivant que l'on a, au contraire,

$$A - B < p^2$$

ou

$$A - B > p^2.$$

A l'égard de la seconde droite, il vient

$$(mp^2 + z^2 - p^2 + B)^2 = 0,$$

d'où

$$z^2 = \frac{B}{A}(p^2 - A),$$

Quand on a $B > 0$, si p^2 est $< A - B$, on a *à fortiori* $p^2 < A$, et si p^2 est $> A - B$, on peut avoir $p^2 < A$ ou $p^2 > A$.

Quand on a $B < 0$, si p^2 est $> A - B$, on a $p^2 > A$, et si p^2 est $< A - B$, on aura $p^2 > A$ ou $< A$.

D'après quoi, les deux droites ne coupent jamais à la fois la surface. Que l'une la coupe, l'autre ne le fait pas; toutes deux peuvent ne pas la rencontrer.

Sections de la surface par les plans menés suivant la droite D.

Portons l'origine à la rencontre de la droite avec l'axe des x. Les formules à employer seront

$$x = -\frac{p}{m} + x_1, \quad y = y_1, \quad z = z_1;$$

il s'ensuit

$$\left(x_1^2 - \frac{2p}{m}x_1 + y_1^2 + z_1^2 + \frac{p^2}{m^2}\frac{B}{A} + B\right)^2$$
$$= 4\left[A\left(x_1 - \frac{B}{A}\frac{p}{m}\right)^2 + By^2\right].$$

Soit $z_1 = x_1 \operatorname{tang}\omega$ l'équation d'un plan sécant. En prenant pour nouvel axe des x sa trace sur le plan des zx, on aura à l'égard de la section

$$z_1 = x_2 \cos\omega, \quad z_1 = x_2 \sin\omega, \quad z = 0,$$

$$\left(x_2^2 + y_2^2 - \frac{2p}{m} x_2 \cos\omega + \frac{p^2}{m^2}\frac{B}{A} + B\right)^2$$
$$= 4\left[A\left(x_2 \cos\omega - \frac{B}{A}\frac{p}{m}\right)^2 + By^2\right],$$

d'où

$$y_2^2 + x_2^2 - 2\left(\frac{p}{m}\cos\omega \pm \sqrt{A\cos^2\omega - B}\right)x_2 + \frac{B}{m^2A}(p^2 - Am^2) = 0,$$

ou

$$y_2^2 + \left(x_2 - \frac{p}{m}\cos\omega \mp \sqrt{A\cos^2\omega - B}\right)^2$$
$$= \left(\frac{p\sqrt{A\cos^2\omega - B}}{m\sqrt{A}} \pm \sqrt{A}\cos\omega\right)^2.$$

Donc la section est le système de deux cercles ayant la droite D pour axe radical, cercles réels tant que l'on a

$$A\cos^4\omega - B < 0.$$

La section serait imaginaire, quel que fût ω, si l'on avait $A < B$. La surface serait donc alors imaginaire.

Il n'y a pas lieu, en conséquence, d'attribuer à m et à p des valeurs telles que $m = \mu i$, $p = \varpi i$, si l'on suppose $A > 0$ et $B > 0$, car $\frac{A - B}{A}$ ne saurait être négatif.

Si, en supposant $B > 0$, on prenait $A < 0$, on aurait bien $\frac{A - B}{A} = m^2 > 0$; la droite D serait perpendiculaire à l'axe non focal de l'hyperbole; mais la surface serait imaginaire, puisqu'on aurait alors $B > A$. Ce cas revient à l'hypothèse considérée de $m = 0$, $n^2 = \frac{B - A}{B}$ pour

$B < 0$. C'est donc, comme on l'a annoncé, une hypothèse à rejeter.

Ainsi, pour que la surface soit réelle, il faut que la droite D soit perpendiculaire à l'axe focal de la conique, et les sections de la surface par des plans menés suivant cette droite sont des couples de cercles ayant la droite pour axe radical commun.

Sections de la surface par des plans menés suivant la droite D′.

Un plan passant par D′ ayant pour équation

$$x + mp = \lambda y,$$

on aura pour la section

$$(x^2 + y^2 + z^2 - p^2 + B)^2 = 4(A\lambda^2 + B)y^2,$$

d'où

$$x^2 + y^2 + z^2 - p^2 + B = \pm 2y\sqrt{A\lambda^2 + B},$$

$$x^2 + \left(y \mp \sqrt{A\lambda^2 + B}\right)^2 + z^2 = A\lambda^2 + p^2.$$

La section sera donc le système de deux cercles à la fois réels ou imaginaires conjugués.

Elle sera réelle si la distance du centre au plan est moindre que le rayon, c'est-à-dire si l'on a

$$\left(\frac{mp \mp \lambda\sqrt{A\lambda^2 + B}}{\sqrt{1 + \lambda^2}}\right)^2 \leqq A\lambda^2 + p^2,$$

d'où

$$\left[p\sqrt{A\lambda^2 + B} \mp \lambda\sqrt{A(A - B)}\right]^2 \geqq 0,$$

ce qui a lieu pour toute valeur de λ, si l'on a $B > 0$, $A > 0$, $A - B > 0$; et pour $\lambda^2 \geqq -\frac{B}{A}$, si l'on a $B < 0$, $A > 0$.

L'équation (1) de la surface peut se transformer en

$$(x^2+y^2+z^2-p^2+B)^2-4[A(x+mp)^2+By^2]$$
$$+4[A(mx+p)^2-Bz^2]$$
$$=4[A(x+mp)^2-Bz^2],$$

ou

$$(x^2+y^2+z^2-p^2+B)^2-4B(x^2+y^2+z^2-p^2)$$
$$=4[A(x+mp)^2-Bz^2],$$

$$(2)\quad (x^2+y^2+z^2-p^2-B)^2=4\left[(A-B)\left(x+\frac{p}{m}\right)^2-Bz^2\right].$$

En partant de cette forme, on pourrait procéder d'une manière semblable à celle que nous venons de suivre pour les sections par des plans menés suivant la droite D.

Sphères inscrites à la surface suivant les cercles dont la droite D *est l'axe radical.*

L'équation (1) étant celle de l'enveloppe d'une sphère dont l'équation générale est

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+z^2=(m\alpha+p)^2,$$

quand on a

$$\frac{\alpha^2}{A}+\frac{\beta^2}{B}=1 \quad \text{et} \quad m^2=\frac{A-B}{A},$$

on voit immédiatement que l'équation (2) est celle de l'enveloppe d'une sphère qui a pour équation générale

$$(x-\lambda)^2+y^2+(z-\nu)^2=m'^2(\lambda+mp)^2,$$

si l'on a

$$\frac{\lambda^2}{A-B}+\frac{\nu^2}{-B}=1 \quad \text{et} \quad m'^2=\frac{A}{A-B}.$$

Donc la surface est l'enveloppe d'une sphère dont le centre décrirait dans le plan xz la conique représentée par

$$y = 0, \quad \frac{x^2}{A - B} - \frac{z^2}{B} = 1,$$

et dont le rayon serait dans un rapport constant égal à l'excentricité de cette conique avec la distance du centre à la droite qui a pour équations

$$y = 0, \quad x + mp = 0.$$

Or cette droite est D′, et, d'après la première génération, les plans des intersections successives de la seconde sphère mobile se coupent suivant la droite D.

Les deux coniques sont d'ailleurs focales l'une de l'autre.

D'après cela, soient considérées deux coniques focales l'une de l'autre, et respectivement dans leurs plans, deux droites D, D′ perpendiculaires à leur axe commun, telles que le centre des coniques en soit à des distances dont le rapport égale l'excentricité de l'hyperbole, si l'on prend pour la première distance celle qui concerne la droite placée dans le plan de l'ellipse. Imaginons une sphère dont le centre parcourt l'une des coniques, tandis que son rayon et la distance du centre à celle des droites D et D′ qui est dans le plan de cette conique sont dans un rapport constant égal à l'excentricité de la conique; puis une seconde sphère, dans des conditions analogues, dont le centre parcourt la seconde conique. Les deux sphères présentent la même enveloppe, et de chaque côté les intersections successives seront des cercles ayant pour axe radical commun la droite située dans le plan de leurs centres.

Les sphères inscrites à la surface suivant les cercles dont les plans se coupent suivant la droite D se déterminent encore assez simplement comme il suit :

L'équation (2) de la surface

$$(x^2+y^2+z^2-p^2-\mathrm{B})^2=4\left[(\mathrm{A}-\mathrm{B})\left(x+\frac{p}{m}\right)^2-\mathrm{B}z^2\right]$$

pourra se mettre sous la forme

$$\begin{aligned}&(x^2+y^2+z^2-2\lambda x-2\nu z-\rho)(x^2+y^2+z^2-2\lambda' x-2\nu' z-\rho')\\&=q[mz\cos\omega-(mx+p)\sin\omega]^2,\end{aligned}$$

si les deux équations

$$\begin{aligned}&(x^2+y^2+z^2)^2-2(p^2+\mathrm{B})(x^2+y^2+z^2)+(p^2+\mathrm{B})^2\\&=4(\mathrm{A}-\mathrm{B})x^2-4\mathrm{B}z^2+8(\mathrm{A}-\mathrm{B})\frac{p}{m}x+4(\mathrm{A}-\mathrm{B})\frac{p^2}{m^2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(x^2+y^2+z^2)^2-2\left[(\lambda+\lambda')x+(\nu+\nu')z+\frac{\rho+\rho'}{2}\right](x^2+y^2+z^2)\\&+(2\lambda x+2\nu z+\rho)(2\lambda' x+2\nu' z+\rho')\\&=q[mz\cos\omega-(mx+p)\sin\omega]^2\end{aligned}$$

peuvent s'identifier, c'est-à-dire si l'on peut avoir à la fois

$$\begin{gathered}\lambda+\lambda'=0,\quad \nu+\nu'=0,\quad \rho+\rho'=2(p'+\mathrm{B}),\\-4\lambda\lambda'+qm^2\sin^2\omega=4(\mathrm{A}-\mathrm{B}),\\-4\nu\nu'+qm^2\cos^2\omega=-4\mathrm{B},\\4(\lambda\nu'+\nu\lambda')=-2qm^2\sin\omega\cos\omega,\\-2\lambda\rho'-2\lambda'\rho+2mpq\sin^2\omega=8(\mathrm{A}-\mathrm{B})\frac{p}{m},\\2\nu\rho'-2\nu'\rho+2mpq\sin\omega\cos\omega=0,\\-\rho\rho'+qp^2\sin^2\omega=4(\mathrm{A}-\mathrm{B})\frac{p^2}{m^2}-(p^2+\mathrm{B})^2.\end{gathered}$$

On tire de là

$$\begin{gathered}\lambda'=-\lambda,\quad \mu'=-\mu,\quad qm^2\sin^2\omega=4(\mathrm{A}-\mathrm{B})-4\lambda^2,\\qm^2\cos^2\omega=-4\mathrm{B}-4\mu^2,\end{gathered}$$

d'où

$$qm^2 = 4(A - 2B) - 4(\lambda^2 + \mu^2),$$

$$-16(A - B - \lambda^2)(B + \nu^2) = 16\lambda^2\nu^2 \quad \text{ou} \quad \frac{\lambda^2}{A - B} - \frac{\nu^2}{B} = 1,$$

$$2\nu[2(p^2 + B) - \rho] - 2\nu\rho + 4\frac{p}{m}2\lambda\nu = 0,$$

$$\rho = p^2 + B + \frac{2p}{m}\lambda, \quad \rho' = p^2 + B - \frac{2p}{m}\lambda,$$

expressions qui vérifient

$$-2\lambda\rho' - 2\lambda'\rho + 2mpq\sin^2\omega = 8(A - B)\frac{p}{m},$$

$$-\rho\rho' + qp^2\sin^2\omega = 4(A - B)\frac{p^2}{m^2} - (p^2 + B)^2.$$

La valeur de qm^2 peut se transformer en

$$qm^2 = -4\left(\frac{A - B}{B}\nu^2 + \frac{B}{A - B}\lambda^2\right),$$

et l'on a

$$\text{tang}^2\omega = \frac{\lambda^2 - (A - B)}{B + \nu^2}.$$

Donc l'équation de la surface peut se mettre sous la forme

$$\left(x^2 + y^2 + z^2 - 2\lambda x - 2\nu z - p^2 - B - \frac{2p}{m}\lambda\right)$$
$$\times\left(x^2 + y^2 + z^2 + 2\lambda x + 2\nu z - p^2 - B + \frac{2p}{m}\lambda\right)$$
$$= 4\left(\frac{A - B}{B}\nu^2 + \frac{B}{A + B}\lambda^2\right)\left[z\cos\omega - \left(x + \frac{p}{m}\right)\sin\omega\right]^2,$$

pourvu qu'on ait

$$\frac{\lambda^2}{A - B} - \frac{\nu^2}{B} = 1 \quad \text{et} \quad \text{tang}^2\omega = \frac{\lambda^2 - (A - B)}{B + \nu^2};$$

ce qui accuse que chacune des sphères données par les équations

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\lambda x - 2\nu z - p^2 - B - \frac{2p}{m}\lambda = 0,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2\lambda x + 2\nu z - p^2 - B + \frac{2p}{m}\lambda = 0,$$

est tangente à la surface suivant son intersection par le plan

$$z \cos\omega - \left(x + \frac{p}{m}\right)\sin\omega = 0.$$

On a d'ailleurs pour le rayon de la première sphère

$$r^2 = \lambda^2 + \nu^2 + p^2 + B + \frac{2p}{m}\lambda = \frac{A}{A - B}(\lambda + mp)^2.$$

Les faits précédemment constatés se retrouvent ainsi.

Dans la surface que nous venons d'étudier, les deux séries de cercles sont des lignes de courbure. Cette surface est donc une cyclide.

Quand des cyclides sont parallèles, les sphères qui leur sont inscrites suivant leurs lignes de courbure ont les mêmes centres. En conséquence, étant données deux coniques focales l'une de l'autre, si l'on fait varier dans le plan de l'une une droite D perpendiculairement à l'axe commun, les surfaces cyclides correspondantes sont parallèles; et toutes les cyclides parallèles à une première peuvent ainsi être considérées comme dérivant d'un même système de coniques focales, quand on fait varier les axes radicaux relatifs à leurs lignes de courbure.

Comme circonstance limite, les deux coniques peuvent être deux paraboles focales l'une de l'autre.

Quand sur une surface les lignes de courbure d'une série sont circulaires et les autres planes, on sait que les plans de ces dernières passent par une même droite qui est le lieu des sommets des cônes circonscrits à la surface suivant les premières lignes. En vérifiant pour notre surface que les plans tangents le long d'une caractéristique sur la sphère mobile concourent en un même point sur l'axe radical des lignes de l'autre série, on trouve que ce point est sur la tangente à la conique directrice au centre même de la sphère. Cette particularité, qui, au reste, se rattache à un fait plus général indiqué par M. Bonnet dans son Mémoire sur les surfaces dont les lignes de courbure sont planes ou sphériques, donne une nouvelle génération de la cyclide. Elle en fait le lieu du cercle de contact de la sphère mobile et d'un cône circonscrit ayant son sommet à la rencontre de la droite directrice et de la tangente menée à la conique directrice par le centre de la sphère : point de vue qui peut trouver son application dans la géométrie descriptive.

Pour faire la vérification dont nous venons de parler, considérons l'équation

$$(x^2+y^2+z^2-p^2+\mathrm{B})^2=4[\mathrm{A}(x+mp)^2+\mathrm{B}y^2].$$

On aura pour le plan tangent

$$\begin{aligned}(x^2+y^2+z^2-p^2+\mathrm{B})(\mathrm{X}x+\mathrm{Y}y+\mathrm{Z}z-p^2+\mathrm{B})\\ =2\mathrm{A}(x+pm)(\mathrm{X}+mp)+2\mathrm{BY}y+2[\mathrm{A}(x+mp)^2+\mathrm{B}y^2].\end{aligned}$$

Le plan de la caractéristique est donné par

$$\frac{x+mp}{\frac{\alpha}{\mathrm{A}}}=\frac{y}{\frac{\beta}{\mathrm{B}}}=\sqrt{\mathrm{A}(x+mp)^2+\mathrm{B}y^2},$$

de sorte qu'on a pour les points de cette ligne

$$x^2+y^2+z^2-p^2+\mathrm{B}=\pm\frac{2\mathrm{B}y}{\beta};$$

mais pour avoir $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+z^2=(m\alpha+p)^2$

il y a à prendre

$$x^2+y^2+z^2-p^2+\mathrm{B}=\frac{2\mathrm{B}y}{\beta}.$$

Il s'ensuit que l'équation du plan tangent se réduit à

$$\mathrm{X}x+\mathrm{Y}y+\mathrm{Z}z-p^2+\mathrm{B}=\alpha(\mathrm{X}+mp)+\beta\mathrm{Y}+\frac{\mathrm{B}y}{\beta}.$$

Si l'on y fait $\mathrm{Z}=0$, $m\mathrm{X}+p=0$, il vient

$$-\frac{p}{m}x+\mathrm{Y}y-p^2+\mathrm{B}=\alpha\left(-\frac{p}{m}+mp\right)+\beta\mathrm{Y}+\frac{\mathrm{B}y}{p},$$

d'où

$$\mathrm{Y}=\frac{\mathrm{B}}{\beta}\left(1+\frac{p\alpha}{m\mathrm{A}}\right),$$

ce qui se rapporte à la rencontre de la droite D et de la tangente à la conique directrice en $(\alpha\beta)$.