NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Correspondance

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 9 (1870), p. 46-48

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1870_2_9__46_1>

CORRESPONDANCE.

Extrait d'une lettre à M. Bourget.

Une erreur s'est glissée dans la rédaction de la question 960. Il existe bien, pour chaque surface du second ordre, un groupe de surfaces du même ordre qui jouissent de la propriété indiquée, mais ces surfaces ne sont pas homofocales à la première.

Permettez-moi, en faisant ici cette rectification, d'entrer à ce sujet dans quelques détails qui, malgré leur simplicité, pourront peut-être intéresser vos lecteurs.

Proposons-nous cette question : *Trouver deux surfaces* S *et* Σ *qui se correspondent point par point, de telle sorte que le plan mené perpendiculairement à la corde qui joint deux points quelconques* A *et* B *de la surface* S *et par le milieu de cette corde passe par le milieu de la corde* $\alpha\beta$ *qui joint les points correspondants sur la surface* Σ.

Soient (x, y, z) les coordonnées d'un point quelconque de S et (ξ, η, ζ) les coordonnées du point correspondant de Σ, en sorte que ξ, η, ζ sont des fonctions actuellement indéterminées de x, y et z; soient encore (x', y', z') les coordonnées d'un autre point arbitraire de S et (ξ', η', ζ')

les coordonnées du point qui lui correspond sur Σ. Si les deux surfaces S et Σ jouissent de la propriété énoncée ci-dessus, on devra avoir

$$(1)\quad \begin{cases} (\xi+\xi'-x-x')(x-x') \\ \quad +(\eta+\eta'-y-y')(y-y')+(\zeta+\zeta'-z-z')(z-z')=0. \end{cases}$$

Supposons maintenant que les relations qui existent entre les points correspondants des deux surfaces soient de la forme

$$(2)\qquad \xi=mx,\quad \eta=ny,\quad \zeta=pz,$$

m, n et p désignant des quantités constantes, l'équation (1) deviendra alors

$$(m-1)(x'^2-x^2)+(n-1)(y'^2-y^2)+(p-1)(z'^2-z)=0$$

ou bien

$$\begin{aligned}(m-1)x'^2+(n-1)y'^2+(p-1)z'^2 \\ =(m-1)x^2+(n-1)y^2+(p-1)z^2.\end{aligned}$$

On satisfera donc d'une façon générale à l'équation (1), quels que soient les deux points donnés, si on les assujettit à rester sur la surface du second ordre

$$(m-1)x^2+(n-1)y^2+(p-1)z^2=\text{const.}$$

Faisons la constante égale à λ^2 et $m-1=\frac{\lambda^2}{a^2}$, $n-1=\frac{\lambda^2}{b^2}$, $p-1=\frac{\lambda^2}{c^2}$; a^2, b^2 et c^2 étant de nouvelles constantes, l'équation de la surface S deviendra

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

et l'équation d'une quelconque des surfaces Σ sera, en vertu des formules de transformation (2),

$$\frac{a^2x^2}{(a^2+\lambda^2)^2}+\frac{b^2y^2}{(b^2+\lambda^2)^2}+\frac{c^2z^2}{(c^2+\lambda^2)^2}=1,$$

équation où λ désigne un paramètre arbitraire.

Il résulte immédiatement, soit des formules (2), soit encore de la propriété même qui a servi à définir les surfaces, que la droite qui joint un point quelconque A de S au point correspondant de Σ est normale en S au point A.

On voit immédiatement que les surfaces Σ peuvent être regardées comme le lieu des points qui partagent dans un rapport constant les portions des normales interceptées entre la surface S et un quelconque des plans de symétrie de cette surface.

Si l'on fait successivement $\lambda^2 = -a^2$, $-b^2$ et $-c^2$, la surface Σ se confond tour à tour avec les trois plans de symétrie de S; on peut donc faire correspondre chacun de ces plans avec S, et point par point de telle sorte que le mode de correspondance jouisse de la propriété indiquée. Le point correspondant sur un des plans de symétrie à un point donné A de S est évidemment le point de ce plan où passe la normale en A à la surface; d'où la solution d'une question que j'ai proposée dans les *Nouvelles Annales*. E. Laguerre.