NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

LOUIS SALTEL

Note sur la détermination des foyers d'une section plane dans une surface de second ordre

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 9 (1870), p. 463-469

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1870_2_9__463_1>

NOTE SUR LA DÉTERMINATION DES FOYERS D'UNE SECTION PLANE DANS UNE SURFACE DE SECOND ORDRE;

PAR M. LOUIS SALTEL.

Dans une courbe algébrique, un foyer a pour caractère analytique d'être tel, *que si l'on imagine menées de ce point les tangentes à la courbe, deux d'entre elles aient leur point de contact à l'intersection de la polaire* « directrice dans les coniques » *et du point considéré comme un cercle de rayon nul. En d'autres termes, l'équation quadratique des tangentes doit contenir le facteur* $(x^2 + y^2) = 0$.

D'après cela, pour qu'un point soit foyer d'une section plane d'une surface, *il faut et il suffit que, si l'on imagine mené de ce point le cône circonscrit à la surface, son intersection totale avec le plan de la courbe contienne au moins un cercle de rayon nul.*

Or on sait que, s'il s'agit d'une surface de second ordre pour que cette dernière condition soit remplie, *il faut et il suffit que le plan sécant soit une direction de sections circulaires.*

De là une solution que je propose et que je vais développer.

Soient α, β, γ les coordonnées du foyer et

$$f(x, y, z) = 0, \tag{1}$$

$$mx + ny + pz + q = 0 \tag{2}$$

les équations de la surface et du plan.

Le cône circonscrit à la surface est représenté par l'équation

$$4f(x, y, z)f(\alpha, \beta, \gamma) = (xl'_\alpha + yl'_\beta + zl'_\gamma + tl'_\rho)^2.$$

Considérons les termes du second degré

$$\text{(3)} \quad A_1 x^2 + A'_1 y^2 + A''_2 z^2 + 2B_1 yz + 2B'_1 zx + 2B''_2 xy = 0.$$

L'ensemble des directions des sections circulaires étant déterminées par les formules

$$\text{(4)} \quad \left\{ \begin{aligned} &(A_1 - \rho_1)x^2 + (A'_1 - \rho_1)y^2 + (A''_1 - \rho_1)z^2 \\ &\qquad + 2B_1 yz + 2B'_1 zx + 2B''_1 xy = 0, \end{aligned} \right.$$

$$\text{(5)} \quad \left\{ \begin{aligned} &(A_1 - \rho_1)(A'_1 - \rho_1)(A''_1 - \rho_1) + (A_1 - \rho_1)B_1^2 \\ &\qquad + (A'_1 - \rho_1)B_1'^2 + (A''_1 - \rho_1)B_1''^2 - 2B_1 B'_1 B''_1 = 0, \end{aligned} \right.$$

les relations qui expriment que le plan donné satisfait à la condition voulue seront deux quelconques des suivantes :

$$(6)\qquad (A''_1 - \rho_1)m^2 - 2B'pm + (A_1 - \rho_1)p^2 = 0,$$

$$(7)\qquad (A''_1 - \rho_1)n^2 - 2Bnp + (A'_1 - \rho_1)p^2 = 0,$$

$$(8)\qquad (A'_1 - \rho_1)m^2 - 2B''mn + (A_1 - \rho_1)n^2 = 0.$$

On les obtient en exprimant que les trois plans coordonnés rencontrent suivant les mêmes droites les plans (4) et le plan (2) où l'on a supposé $q = 0$. Si l'on y joint l'équation

$$(9)\qquad m\alpha + n\beta + p\gamma + q = 0,$$

on a les trois relations déterminant les coordonnées des foyers.

Cela posé, supposons, par exemple, que l'on ait

$$(10)\qquad f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

les équations précédentes se réduisent aux suivantes :

$$\frac{\left(H - a^2\rho_1 - \frac{\alpha^2}{a^2}\right)}{a^2}x^2 + \frac{\left(H - b^2\rho_1 - \frac{\beta^2}{b^2}\right)}{b^2}y^2 + \frac{\left(H - c^2\rho_1 - \frac{\gamma^2}{c^2}\right)}{c^2}z^2$$
$$- 2\frac{\beta\gamma}{b^2c^2}yz - 2\frac{\gamma\alpha}{a^2c^2}zx - 2\frac{\alpha\beta}{a^2c^2}xy = 0,$$

$$\left(H - a^2\rho_1 - \frac{\alpha^2}{a^2}\right)\left(H - b^2\rho_1 - \frac{\beta^2}{b^2}\right)\left(H - c^2\rho_1 - \frac{\gamma^2}{c^2}\right)$$
$$- \left[\left(H - a^2\rho_1 - \frac{\alpha^2}{b^2}\right)\frac{\beta^2\gamma^2}{b^2c^2} + \left(H - b^2\rho_1 - \frac{\beta^2}{b^2}\right)\frac{\gamma^2\alpha^2}{c^2a^2}\right.$$
$$\left. + \left(H - c^2\rho - \frac{\gamma^2}{c^2}\right)\frac{\alpha^2\beta^2}{a^2b^2}\right]$$
$$- 2\frac{\alpha^2\beta^2\gamma^2}{a^2b^2c^2} = 0,$$

ou bien

$$
(11)\quad \left\{
\begin{aligned}
&(\mathrm{H} - a^2\rho_1)(\mathrm{H} - b^2\rho_1)(\mathrm{H} - c^2\rho_1) \\
&\quad - \Big[(\mathrm{H} - b^2\rho_1)(\mathrm{H} - c^2\rho_1)\frac{\alpha^2}{a^2} + (\mathrm{H}^2 - c^2\rho_1)(\mathrm{H} - a^2\rho_1)\frac{\beta^2}{b^2} \\
&\qquad\qquad + (\mathrm{H} - a^2\rho_1)(\mathrm{H} - b^2\rho_1)\frac{\gamma^2}{c^2}\Big] = 0,
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(12)\quad m^2\left(\frac{\mathrm{H}}{c^2} - \rho_1 - \frac{\gamma^2}{c^4}\right) + 2mp\frac{\alpha\gamma}{a^2c^2} + p^2\left(\frac{\mathrm{H}}{a^2} - \rho_1 - \frac{\alpha^2}{a^4}\right) = 0,
$$

$$
(13)\quad n^2\left(\frac{\mathrm{H}}{c^2} - \rho_1 - \frac{\gamma^2}{c^4}\right) + 2np\frac{\beta\gamma}{b^2c^2} + p^2\left(\frac{\mathrm{H}}{b^2} - \rho_1 - \frac{\beta^2}{b^4}\right) = 0,
$$

$$
(14)\quad m^2\left(\frac{\mathrm{H}}{b^2} - \rho_1 - \frac{\beta^2}{b^4}\right) + 2mn\frac{\alpha\beta}{a^2b^2} + n^2\left(\frac{\mathrm{H}}{a^2} - \rho_1 - \frac{\alpha^2}{a^4}\right) = 0,
$$

$$
(15)\qquad m\alpha + n\beta + p\gamma + q = 0.
$$

On a posé

$$
\mathrm{H} = \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} - 1.
$$

Remarquons que les équations (12), (13), (14) sont en général équivalentes aux équations

$$
(16)\quad \mathrm{H}\left(\frac{p^2}{a^2} + \frac{m^2}{c^2}\right) - \rho_1(p^2 + m^2) = \left(\frac{p\alpha}{a^2} - \frac{m\gamma}{c^2}\right)^2,
$$

$$
(17)\quad \mathrm{H}\left(\frac{p^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2}\right) - \rho_1(p^2 + n^2) = \left(\frac{p\beta}{b^2} - \frac{n\gamma}{c^2}\right)^2,
$$

$$
(18)\quad 2\mathrm{H}\frac{mn}{c^2} - 2\rho_1 mn = 2\left(\frac{p\alpha}{a^2} - \frac{m\gamma}{c^2}\right)\left(\frac{p\beta}{b^2} - \frac{n\gamma}{c^2}\right).
$$

On obtient, en effet, l'équation (18) en multipliant les équations (12), (13), (14) respectivement par les quantités, généralement différentes de zéro, $\left(\frac{n}{m}\right)$, $\left(\frac{m}{n}\right)$, $\left(-\frac{p^2}{mn}\right)$, et les ajoutant. Quant aux deux premières de ce dernier système, elles sont identiques avec les deux premières de l'autre système.

Appliquons ces formules générales aux problèmes suivants :

Problème I. — *Trouver le lieu des foyers des sections centrales.*

Les coordonnées des foyers pour une position particulière du plan étant déterminées par deux des équations (16), (17), (18), jointes aux équations (11) et (15) où l'on fait ($q = 0$), on obtiendra l'équation du lieu demandé en éliminant (m, n, p, ρ_1) entre ces quatre équations. L'équation (11) en ρ_1 étant indépendante de (m, n, p), on est conduit à éliminer ces quantités entre les autres : cela est facile. Il suffit de multiplier respectivement par (α^2, β^2, $\alpha\beta$) les équations (16), (17), (18) et de les ajouter en ayant égard à (15). On trouve, toutes réductions faites,

$$-\rho_1(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = \mathrm{H} + 1.$$

La substitution de cette valeur de ρ_1 dans l'équation (11) fournit immédiatement l'équation du lieu. Avant de faire cette substitution, remarquons qu'elle peut s'écrire, en tenant compte de ce dernier résultat,

$$\begin{aligned}\rho_1^3 a^2 b^2 c^2 - \rho_1^2(a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2)\\ - \rho_1^2(a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2) + \rho_1(a^2 + b^2 + c^2) + \mathrm{H} = 0\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}\rho_1^2(a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2) - (\mathrm{H} + 1)\\ + (a^2\rho_1 + 1)(b^2\rho_1 + 1)(c^2\rho_1 + 1) = 0.\end{aligned}$$

Si maintenant on substitue, il vient, en remplaçant (α, β, γ)

par (x, y, z),

$$\begin{aligned}
\Big[(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)-(x^2+y^2-z^2)^2\Big]& \\
\times(x^2+y^2+z^2)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)& \\
-\left[a^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)+(x^2+y^2+z^2)\right]& \\
\times\left[b^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)-(x^2+y^2+z^2)\right]& \\
\times\left[c^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)-(x^2+y^2+z^2)\right]&=0.
\end{aligned}$$

Problème II. — *Trouver le lieu des foyers des sections faites parallèlement à l'un des axes.*

Supposons que les plans soient, par exemple, parallèles à l'axe des x. Cela exige $m = 0$. Dès lors, si l'on fait cette hypothèse dans les formules fondamentales (12), (13), (14), (15), elles se réduisent aux suivantes :

$$\text{(19)} \qquad H - a^2\rho_1 - \frac{\alpha^2}{a^2} = 0,$$

$$n^2\left(\frac{H}{c^4} - \rho_1 - \frac{\gamma^2}{c^4}\right) + 2np\,\frac{\beta\gamma}{b^2c^2} + p^2\left(\frac{H}{b^2} - \rho_1 - \frac{\beta^2}{b^4}\right) = 0,$$

$$n\beta + p\gamma + q = 0,$$

et conséquemment en supprimant le facteur $\frac{\alpha^2}{a^2}$ l'équation en ρ_1 se réduira à

$$\text{(20)} \qquad (H - b^2\rho_1)\frac{\gamma^2}{c^2} + (H - c^2\rho_1)\frac{\beta^2}{b^2} = 0.$$

Telles sont les formules qui, dans l'hypothèse actuelle, définissent les foyers. On obtiendra l'équation de leur lieu en éliminant ρ_1 entre les équations (19) et (20). On obtient immédiatement

$$\left(\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\left[(a^2-c^2)\frac{y^2}{b^2}+(a^2-b^2)\frac{z^2}{c^2}+x^2\right]$$
$$-\left[(a^2-c^2)\frac{y^2}{b^2}+(a^2-b^2)\frac{z^2}{c^2}\right]=0.$$

Nota. Ainsi se trouvent établis, par une analyse différente, les résultats obtenus par M. Painvin (*voir* t. III, p. 481). Je crois que, si l'on compare les deux méthodes, la précédente présente des interprétations géométriques et des simplifications algébriques qui la rendent préférable.

Il nous reste cependant à faire remarquer que si les considérations précédentes se prêtent avec facilité à la détermination des lieux géométriques, elles seraient moins avantageuses que celles dont nous avons fait usage dans une autre Note, s'il s'agissait de calculer effectivement les coordonnées des foyers d'une section particulière. Nous terminerons en proposant le problème suivant :

Trouver le lieu des foyers des paraboles obtenues par les plans parallèles aux plans tangents au cône asymptote.