H. DURRANDE

Note sur les surfaces du quatrième ordre

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 9 (1870), p. 440-457
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1870_2_9__440_0>

NOTE SUR LES SURFACES DU QUATRIÈME ORDRE

(suite et fin, voir 2e série, t IX, p. 410),

PAR M. H. DURRANDE,
Professeur à la Faculté des Sciences de Rennes.

II. — *Surface résultant de faisceaux de quadriques doublement tangentes.*

6. Supposons que chaque faisceau de quadriques se compose de surfaces doublement tangentes à l'une d'elles, alors les équations des deux faisceaux deviennent

$$S - \lambda PQ = 0, \tag{1}$$

$$S_1 - \mu P_1 Q_1 = 0; \tag{2}$$

si la relation homographique est

$$\lambda + k\mu = 0,$$

l'équation de la surface résultante est

$$SP_1Q_1 + kS_1PQ = 0. \tag{3}$$

Cette surface contient les quatre coniques servant de bases aux deux faisceaux, et les quatre droites intersections des quatre plans P, Q, P_1, Q_1, savoir :

$$(P = 0,\ P_1 = 0),\quad (P = 0,\ Q_1 = 0),$$
$$(Q = 0,\ P_1 = 0),\quad (Q = 0,\ Q_1 = 0).$$

Tout plan mené par une de ces quatre droites coupe la surface suivant une courbe du troisième ordre.

Les équations de la seconde série des courbes génératrices sont

$$\left\{\begin{aligned} &P_1Q_1 - \nu PQ = 0,\\ &S + \frac{k}{\nu}S_1 = 0.\end{aligned}\right.$$

La surface est d'ailleurs doublement tangente à toutes les surfaces de chaque faisceau.

Si les plans Q, Q_1 se confondent, l'équation de la surface devient

$$Q(SP_1 + kS_1P) = o.$$

La surface se compose donc d'un plan et d'une surface du trosième ordre.

Elle se réduirait enfin à une surface du second ordre et à un système de deux plans, si les plans P et P_1 se confondaient aussi.

7. Si les surfaces S, S_1 ne se correspondent pas et que la relation entre les paramètres soit

$$\lambda\mu + k = o,$$

l'équation de la surface résultante devient

$$SS_1 + kPP_1QQ_1 = o.$$

Si les plans Q, Q_1 se confondent, l'équation devient

$$SS_1 + kPP_1Q^2 = o;$$

la surface est tangente aux surfaces S, S_1 en tous les points des deux coniques

$$(S = o,\ Q = o),\quad (S_1 = o,\ Q_1 = o).$$

Les huit coniques communes à la surface et aux quadriques données se réduisent donc à six.

8. Si l'un des faisceaux est composé de surfaces réglées, on a par exemple

$$S_1 = MN,$$

M, N étant des fonctions linéaires; l'équation de la surface devient, pour $\lambda + k\mu = o$,

$$SP_1Q_1 + kMNPQ = o:$$

sur la surface quatre coniques et huit droites. Si Q_1 et Q se confondent, on a

$$SP_1 + kMNP = 0;$$

on a trois séries de coniques dont les plans passent par les droites (P_1, M), (P_1, N), (P_1, P).

Pour

$$\lambda\mu + k = 0,$$

l'équation devient

$$SMN + kPP_1QQ_1 = 0;$$

les deux formes se confondent dans ce cas.

Si les deux faisceaux sont composés de surfaces réglées, l'équation de la surface devient

$$MNP_1Q_1 + kM_1N_1PQ = 0,$$

et la surface contient donc alors seize droites; elle est *le lieu des points tels, que les produits des distances de chacun d'eux aux faces de deux tétraèdres sont dans un rapport constant.*

III. — *Faisceaux de quadriques ayant pour bases des courbes de contact planes.*

9. Supposons maintenant que chacun des deux faisceaux de quadriques soit formé de surfaces ayant une courbe de contact plane commune.

Les équations des deux faisceaux sont alors

$$S - \lambda P^2 = 0,$$
$$S_1 - \mu P_1^2 = 0.$$

Si les paramètres λ, μ sont liés par la relation

$$\lambda + k\mu = 0,$$

l'équation de la surface est

$$SP_1^2 + kS_1P^2 = 0;$$

la surface du quatrième ordre contient les coniques de contact des deux faisceaux, et elle touche toutes les quadriques suivant ces deux coniques. Elle renferme aussi une droite double (P, P_1). Tout plan mené par cette droite coupe la surface suivant une conique : c'est le second mode de génération de la surface.

Du reste, c'est une remarque que nous pouvons faire dès à présent, que, lorsqu'une droite double est sur la surface, tout plan mené par cette droite doit couper la surface suivant une conique : c'est une des bases de la classification des surfaces du quatrième degré de Kummer.

Lorsque la relation homographique est

$$\lambda\mu + k = 0,$$

l'équation de la surface du quatrième ordre devient

$$SS_1 + kP^2P_1^2 = 0.$$

Les quatre coniques (S, P), (S, P_1), (S_1, P), (S_1, P_1) sont des courbes de la surface, suivant lesquelles elle touche toutes les quadriques des deux faisceaux.

Enfin, si les deux surfaces S, S_1 se confondent, la surface se réduit à un système de deux surfaces du second ordre.

IV. — *Faisceaux de quadriques homothétiques.*

10. Ce cas est un cas particulier du précédent ; il suffit, en effet, de supposer que l'un des plans P, P_1 ou Q, Q_1 passe à l'infini ; l'une des courbes communes passe par conséquent à l'infini, et les surfaces du faisceau deviennent homothétiques. Mais nous allons voir que ce cas particulier présente un certain intérêt.

Si un seul des faisceaux se compose de surfaces homothétiques, la surface a pour équation

$$S\Sigma_1 + k\Sigma P = 0.$$

On voit qu'elle passe par les deux coniques (S, P), (Σ_1, P), et par la conique à l'infini. Si les surfaces homothétiques sont en outre concentriques, le second plan passe aussi à l'infini, et l'équation se réduit à

$$S\Sigma_1 + k\Sigma = 0.$$

Il est facile de voir que la surface des ondes de Fresnel et les surfaces (*) analogues correspondant aux diverses surfaces à centre du second ordre sont comprises dans cette forme. En effet, la surface des ondes de Fresnel a pour équation

$$\begin{gathered}(x^2 + y^2 + z^2)(a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2)\\ - a^2(b^2 + c^2)x^2 - b^2(c^2 + a^2)y^2 - c^2(a^2 + b^2)z^2 + a^2b^2c^2 = 0;\end{gathered}$$

or on peut l'écrire évidemment

$$\begin{gathered}(x^2 + y^2 + z^2 - R^2)(a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 - p^2)\\ - (\alpha^2x^2 + \beta^2y^2 + \gamma^2z^2 - q^2) = 0,\end{gathered}$$

α, β, γ, R, p, q désignant des constantes; et l'on voit ainsi que cette surface est le lieu des intersections de deux faisceaux se composant l'un de sphères concentriques

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 - \lambda = 0,$$

l'autre de quadriques

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 - p^2 - \mu(\alpha^2x^2 + \beta^2y^2 + \gamma^2z^2 - q^2) = 0,$$

(*) *Nouvelles Annales*, 1861, et Thèses présentées à la Faculté des Sciences de Paris, 1864 (H. Durrande).

les deux paramètres étant liés par la relation

$$\lambda\mu + 1 = 0.$$

11. Passons au cas où les deux faisceaux se composent tous deux de surfaces homothétiques; les équations de ces faisceaux sont

$$\begin{cases} S - \lambda P = 0, \\ S_1 - \mu P_1 = 0. \end{cases}$$

Supposons d'abord λ et μ liés par la relation

$$\lambda + k\mu = 0,$$

l'équation de la surface résultante est

$$(1) \qquad SP_1 + kS_1 P = 0,$$

ce qui montre que la surface est alors du troisième degré.

D'ailleurs, le second mode de génération est représenté par les équations

$$(2) \qquad \begin{cases} S + \dfrac{k}{\nu} S_1 = 0, \\ P_1 - \nu P = 0, \end{cases}$$

ce qui prouve que *la surface résultante de deux faisceaux homographiques, l'un de quadriques, l'autre de plans, est une surface du troisième degré passant par les deux coniques et la droite, bases des deux faisceaux.*

Ce résultat pouvait facilement être prévu.

12. Si les deux surfaces S, S_1 sont en outre doublement tangentes, alors on a

$$S_1 = S + MN,$$

M, N ayant la signification déjà donnée; alors l'équation (1) devient

$$(2) \qquad S(P_1 + kP) + kPMN = 0.$$

A l'inspection de cette équation on reconnaît qu'il y a trois droites sur la surface, deux points doubles où elle touche la surface S, et trois séries de coniques réparties dans les plans

$$P_1 + m_1 P = 0, \quad P_1 + k P + m_2 M = 0, \quad P_1 + k P + m_3 N = 0.$$

On pourrait évidemment se proposer, dans tous les cas semblables à celui-ci, où l'on rencontre une ou plusieurs séries de coniques passant par une droite, ou dont les plans enveloppent une certaine surface, de trouver le lieu des centres de ces coniques. Cette recherche ne présente d'ailleurs aucune difficulté.

13. Considérons ensuite le cas où l'on a

$$\lambda\mu + k = 0,$$

alors l'équation de la surface résultante devient

$$(3) \qquad SS_1 + k PP_1 = 0.$$

Elle est du quatrième ordre, et a une courbe double à l'infini.

14. Examinons d'une manière particulière le cas où les deux surfaces S, S_1 sont elles-mêmes homothétiques; alors S et S_1 ne diffèrent que par les termes du premier degré, et on peut poser $S_1 = S + M$; toutes les surfaces des deux faisceaux seront elles-mêmes homothétiques, et par suite les courbes d'intersection des quadriques correspondantes sont planes.

Soient

$$\begin{cases} S + M - \mu P_1 = 0 \\ S - \lambda P = 0 \end{cases}$$

les deux faisceaux de quadriques.

Si les paramètres λ, μ sont liés par la relation

$$\lambda + k\mu = 0,$$

l'équation de la surface résultante est

$$(1) \qquad S(P_1 + kP) + kMP = 0.$$

La surface est du troisième ordre, elle a une conique à l'infini : c'est elle qui est commune aux deux faisceaux de quadriques.

On voit sans peine les deux séries de coniques situées sur la surface et passant par les deux droites que l'équation (1) met en évideuce.

15. Mais lorsque les paramètres sont liés par la relation

$$\lambda\mu + k = 0,$$

alors l'équation de la surface prend la forme

$$(1) \qquad S(S + M) + kPP_1 = 0;$$

la surface, qui est du quatrième ordre, a nne courbe double à l'infini, deux séries de sections coniques; chacun des plans de ces coniques coupe la surface suivant deux de ces courbes.

Les deux modes de génération de la surface sont représentés par les deux groupes d'équations

$$\left\{\begin{aligned} &S - \lambda P = 0, \\ &S + M + \frac{k}{\lambda} P_1 = 0, \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} &S - \mu P_1 = 0, \\ &S + M + \frac{k}{\mu} P = 0, \end{aligned}\right.$$

ou, ce qui revient au même, par les deux suivants :

$$\left\{\begin{aligned} &S - \lambda P = 0, \\ &M + \lambda P + \frac{k}{\lambda} P_1 = 0, \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} &S - \mu P_1 = 0, \\ &M + \mu P_1 + \frac{k}{\lambda\mu} P = 0. \end{aligned}\right.$$

On voit très-nettement ainsi les deux séries de coniques. Les plans des deux séries sont d'ailleurs identiques si l'on pose $\mu = \frac{k}{\lambda\mu}$.

Tous ces plans, qui passent par un point fixe ($M = 0$, $P = 0$, $P_1 = 0$) sont tangents à un cône du second degré et doublement tangents à la surface.

Ces résultats se mettent facilement en évidence sur l'équation même de la surface; on peut, en effet, l'écrire

$$S^2 + SM + kPP_1 = 0$$

ou

$$\left(S + \frac{M}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}(M^2 - 4kPP_1) = 0;$$

or

$$M^2 - 4kPP_1 = 0$$

est l'équation d'un cône circonscrit à la surface en tous les points de la courbe suivant laquelle il coupe la quadrique

$$S + \frac{M}{2} = 0.$$

Si le plan $M = 0$ passe à l'infini, c'est-à-dire si M se réduit à une constante, les deux surfaces S, $S + M$ sont concentriques; le cône circonscrit se transforme en un cylindre (*).

Si M est identiquement nul, les deux surfaces S, $S + M$ se confondent, le cône devient un système de deux plans ($P = 0$, $P_1 = 0$) qui touchent la surface suivant les deux courbes planes bases des deux faisceaux.

(*) On a bien remarqué sans doute que tout plan tangent au cône

$$M^2 - 4kPP_1 = 0$$

a une équation de la forme

$$mM + pP + p_1 P_1 = 0,$$

ce qui est bien celle des plans des sections coniques.

Supposons que

$$S + \frac{M}{2} = \alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \gamma^2 z^2 - 1,$$

et que

$$\frac{1}{4}(M^2 - 4kPP_1) = mx^2 + ny^2 + pz^2:$$

alors l'équation que nous venons d'obtenir peut s'écrire

$$(\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \gamma^2 z^2 - 1)^2 - (mx^2 + ny^2 + pz^2) = 0;$$

on peut encore l'écrire

$$(2)\left\{\begin{aligned}&(\alpha^2x^2 + \beta^2y^2 + \gamma^2 z + 1)^2 - (m + 4\alpha^2)x^2 - (n + 4\beta^2)y^2\\ &\qquad - (p + 4\gamma^2)z^2 = 0,\end{aligned}\right.$$

ce qui met en évidence l'existence d'un autre cône circonscrit à la surface, et par suite une autre série double de sections coniques.

Enfin, on peut encore combiner les termes de l'équation des trois manières suivantes (*) :

$$(4)\left\{\begin{aligned}&\left(\alpha^2x^2 + \beta^2y^2 + \gamma^2z^2 + \frac{m + 2\alpha^2}{2\alpha^2}\right)^2 + \frac{m\beta^2 - n\alpha^2}{\alpha^2}y^2\\ &\qquad + \frac{m\gamma^2 - p\alpha^2}{\alpha^2}z^2 + 1 = 0,\end{aligned}\right.$$

$$(5)\left\{\begin{aligned}&\left(\alpha^2x^2 + \beta^2y^2 + \gamma^2z^2 + \frac{n + 2\beta^2}{2\beta^2}\right)^2 + \frac{n\alpha^2 - m\beta^2}{\beta^2}x^2\\ &\qquad + \frac{n\gamma^2 - p\beta^2}{\beta^2}z^2 + 1 = 0,\end{aligned}\right.$$

$$(6)\left\{\begin{aligned}&\left(\alpha^2x^2 + \beta^2y^2 + \gamma^2z^2 + \frac{p + 2\gamma^2}{2\gamma^2}\right)^2 + \frac{p\alpha^2 - m\gamma^2}{\gamma^2}x^2\\ &\qquad + \frac{p\beta^2 - n\gamma^2}{\gamma^2}y^2 + 1 = 0.\end{aligned}\right.$$

(*) L'idée de ce mode de décomposition m'a été fournie par la Note de M. Darboux sur un système de surfaces orthogonales (*Annales scientifiques da l'École Normale*, 1865).

On aperçoit ainsi trois cylindres circonscrits à la surface, et les trois séries de plans tangents à ces cylindres déterminent des sections coniques dans la surface.

Il existe donc pour cette surface du quatrième ordre cinq séries de plans coupant la surface suivant des couples de coniques. (*Voir* Note II.)

V. — *Faisceaux de sphères.*

16. Il est bien évident que tout ce que l'on vient de dire sur les surfaces résultant des intersections de deux faisceaux de quadriques homothétiques s'applique aux surfaces résultant des intersections de deux faisceaux de sphères.

Mais comme les surfaces du quatrième et du troisième ordre que l'on peut obtenir ainsi jouissent de propriétés remarquables, il n'est pas inutile de traiter séparément ce qui les concerne.

17. Considérons d'abord le cas des surfaces du troisième degré; elles résultent, comme précédemment, des intersections de deux faisceaux de sphères dont les plans radicaux passent par une droite fixe; on peut donc substituer à l'équation d'un des faisceaux de sphères celle d'un faisceau de plans. Soient donc

$$\left\{\begin{array}{l} S - \lambda P = 0, \\ Q - \mu Q_1 = 0 \end{array}\right.$$

les équations des deux faisceaux; si l'on a

$$\lambda + k\mu = 0,$$

l'équation de la surface résultante est

$$SQ_1 + kPQ = 0. \tag{1}$$

Soit

$$S = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

l'équation de la sphère donnée,

$$Q_1 = \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta,$$
$$P = \alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta',$$
$$Q = \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z + \delta'' :$$

l'équation de la surface devient

$$(x^2 + y^2 + z^2)(\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta)$$
$$+ k(\alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta')(\alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z + \delta'')$$
$$- R^2(\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta) = 0.$$

Si l'on cherche par exemple le lieu des points d'intersection d'un faisceau de sphères passant par un cercle fixe ou tangentes à un plan donné en un point donné, avec les plans polaires correspondants d'un point fixe, ce lieu est évidemment une des surfaces dont nous venons de former l'équation; car tous ces plans polaires passent par une droite fixe.

Les sections de cette surface par des plans sont des courbes assez étudiées, telles que la strophoïde oblique et d'autres qui s'en rapprochent.

A l'inspection de l'équation (1), on remarque sans peine qu'il y a deux séries de sections circulaires, puisqu'il y a deux droites situées sur la surface.

Dans le cas des faisceaux de sphères, les surfaces résultantes ont une définition géométrique très-simple; ainsi, pour les surfaces du troisième ordre, on voit qu'on peut les définir le *lieu des points dont la puissance par rapport à une sphère fixe multipliée par la distance à un plan fixe est dans un rapport constant avec le produit des distances de ce même point à deux plans fixes.*

Si la relation entre les paramètres est

$$\lambda\mu + k = 0,$$

les plans radicaux passant toujours par une droite fixe, l'équation de la surface résultante ne change pas de forme.

18. Si les plans radicaux des sphères correspondantes ne passent plus par une droite fixe, on n'a plus le droit de substituer l'équation d'un faisceau de plans à celle de l'un des faisceaux de sphères.

Soient alors

$$\begin{cases} S - \lambda P = 0, \\ S_1 - \mu P_1 = 0 \end{cases}$$

les équations des deux faisceaux de sphères ayant respectivement pour bases deux cercles fixes.

Il n'y a pas lieu de faire la supposition

$$\lambda + k\mu = 0,$$

ce serait retomber sur le cas précédent; mais si l'on pose

$$\lambda\mu + k = 0,$$

alors l'équation de la surface résultante est

$$SS_1 + kPP_1 = 0. \tag{2}$$

C'est la forme déjà trouvée au n° 15; et, de plus, si l'on fait

$$S = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = \rho^2 - R^2,$$
$$S_1 = S + M,$$

on voit que l'équation (2) prend la forme

$$\rho^4 + \rho^2 u_1 + u_2 = 0, \tag{3}$$

u_1 désignant une fonction du premier degré et u_2 une fonction du second degré des trois variables; ρ n'est autre chose que le rayon vecteur d'un point (x, y, z) de la surface.

Tout ce qui a été dit au n° 15 sur les sufaces résultant de faisceaux de quadriques homothétiques peut se répéter ici. A toute série de sections coniques répond une série de sections circulaires, ce qu'il était facile de prévoir.

Mais nous trouvons quelque chose de plus à remarquer dans le cas qui nous occupe. Passons en revue quelques formes de l'équation (3).

1° Si u_2 et u_1 sont des fonctions homogènes, la surface représentée par l'équation (3) est la transformée par rayons vecteurs réciproques d'une surface du second degré.

En effet, en séparant les termes de chaque degré, l'équation d'une quadrique peut s'écrire

$$u_2 + u_1 + u_0 = 0;$$

or, par la transformation dont il s'agit et qui revient, si la puissance est égale à l'unité, à changer x en $\frac{x}{\rho^2}$, y en $\frac{y}{\rho^2}$, z en $\frac{z}{\rho^2}$, une fonction homogène u_m, de degré m, se transforme en $\frac{u_m}{\rho^{2m}}$: donc l'équation de la surface transformée sera

$$u_0 \rho^4 + \rho^2 u_1 + u_2 = 0,$$

et en faisant $u_0 = 1$, ou en divisant tout par u_0, on retombe sur la forme (3).

Or on sait que si l'on a deux surfaces orthogonales, en les transformant par rayons vecteurs réciproques, on obtient encore deux surfaces orthogonales; donc il est facile de prévoir, d'après la remarque précédente et le théorème que je viens de rappeler, que l'équation (3) doit renfermer des systèmes de surfaces orthogonales (*). Ainsi, par exemple, si l'on considère les surfaces ayant pour équation

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}+\frac{z^2}{c^2-\lambda}=1,$$

(*) Le théorème relatif à la transformation par rayons vecteurs réciproques, qui se démontre facilement par des considérations géométriques, peut aussi se démontrer de la manière suivante :

Soit $f(x, y, z)=\rho$, $f_1(x, y, z)=\rho_1$, $f_2(x, y, z)=\rho_2$ un système triple de surfaces orthogonales; on sait que l'on a trois relations de la forme

$$\sum \frac{d\rho_i}{dx}\frac{d\rho j}{dx}=0.$$

On a par la transformation en question

$$x=\frac{x'}{r'^2},\quad y=\frac{y'}{r'^2},\quad z=\frac{z'}{r'^2},\quad r'^2=x'^2+y'^2+z'^2,$$

ou bien

$$x'=\frac{x}{r^2},\quad y'=\frac{y}{r^2},\quad z'=\frac{z}{r^2},\quad r^2=x^2+y^2+z^2=\frac{1}{r'^2};$$

et de plus

$$\frac{x'}{r'^4}=\frac{x}{r'^2}=r^2x,\ldots.$$

Or on a

$$\begin{aligned}\frac{d\rho}{dx'}&=\frac{1}{r'^2}\frac{d\rho}{dx}-\frac{2x'}{r'^4}\left(x'\frac{d\rho}{dx}+y'\frac{d\rho}{dy}+z'\frac{d\rho}{dz}\right)\\&=r^2\frac{d\rho}{dx}-2x\left(x\frac{d\rho}{dx}+y\frac{d\rho}{dy}+z\frac{d\rho}{dz}\right)\\&=r^2\frac{d\rho}{dx}-2\mathrm{H}x;\end{aligned}$$

de même

$$\frac{d\rho_1}{dx'}=r^2\frac{d\rho_1}{dx}-2\mathrm{H}_1x.$$

Donc

$$\sum\frac{d\rho}{dx'}\frac{d\rho_1}{dx'}=r^4\sum\frac{d\rho}{dx}\frac{d\rho_1}{dx}-4\mathrm{HH}_1r^2+4\mathrm{HH}_1\Sigma x^2,$$

et comme

$$\Sigma x^2=r^2,$$

on voit que les deux derniers termes se détruisent; donc

$$\sum\frac{d\rho}{dx'}\frac{d\rho_1}{dx'}=r^4\sum\frac{d\rho}{dx}\frac{d\rho_1}{dx}=0.$$

C. Q. F. D.

l'équation de leurs transformées est

$$\rho^4 - \frac{x^2}{a^2 - \lambda} - \frac{y^2}{b^2 - \lambda} - \frac{z^2}{c^2 - \lambda} = 0.$$

2° Je prends maintenant l'équation (3)

$$\rho^4 + \rho U_1 + U_2 = 0,$$

dans laquelle je suppose que U_1 et U_2 ne soient plus des fonctions homogènes, mais des fonctions complètes de leurs degrés respectifs, de sorte que

$$U_1 = v_1 + v_0,$$
$$U_2 = u_2 + u_1 + u_0;$$

si l'on applique à cette forme la transformation par rayons vecteurs réciproques, on trouve

$$u_0 \rho^4 + (u_1 + v_0)\rho^2 + u_2 + v_1 + 1 = 0,$$

c'est-à-dire une équation

$$\rho^4 + V_1 \rho^2 + V_2 = 0$$

de forme identique à la proposée.

Les surfaces comprises dans cette forme d'équation ont donc la propriété de se reproduire par la transformation par rayons vecteurs réciproques; de là le nom d'*anallagmatiques* qui leur a été donné par M. Moutard.

Elles ont la propriété très-importante de former un système simple de surfaces orthogonales. La forme de l'équation (2) montre d'ailleurs qu'elles sont *le lieu des points dont le produit des puissances par rapport à deux sphères fixes est dans un rapport constant avec le produit des distances de ce point à deux plans fixes.*

On pourra lire, dans les *Annales scientifiques de l'École Normale,* 1865, une Note de M. Darboux sur ces surfaces remarquables, et différentes Notes de M. Moutard, indiquant plusieurs de ces propriétés dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1864.

Le tore et la cyclide sont des cas particuliers de ces surfaces.

NOTE I

(relative au n° 3).

Les courbes d'un même système peuvent se rencontrer si un système de valeurs des variables x, y, z vérifie à la fois les équations

$$S = 0, \quad S_1 = 0, \quad \Sigma = 0, \quad \Sigma_1 = 0,$$

ce qui n'a pas lieu en général. Dans ce cas elles passent précisément par ces points communs.

NOTE II.

On peut se rendre compte très-aisément, et pour ainsi dire *à priori*, de la différence des degrés des surfaces obtenues par l'intersection des deux faisceaux de quadriques homothétiques, d'après le degré de la relation en λ, μ.

Soient

$$\begin{cases} S - \lambda P = 0, \\ S + M - \mu P_1 = 0 \end{cases}$$

les équations des deux faisceaux; on voit qu'on peut substituer à l'une d'elles l'équation

$$M - \mu P_1 + \lambda P = 0,$$

qui est celle d'une série de plans.

Si la relation entre λ et μ est du premier degré, ces plans passent par une droite fixe, et la surface résultante est du troisième degré (n° 11); mais si la relation entre λ et μ est de la forme

$$\lambda\mu + h = 0,$$

l'équation des plans renfermera l'un des paramètres au second degré, et par conséquent ces plans enveloppent un cône, et en même temps la surface résultante est du quatrième degré.

En remplaçant l'un des faisceaux des sphères par un faisceau de plans parallèles, on a pour les équations des surfaces génératrices

$$S - \lambda P = 0,$$
$$1 - \mu P_1 = 0,$$

et avec la relation

$$\mu\lambda + k = 0,$$

on trouve

$$S + kPP_1 = 0$$

pour l'équation de la surface résultante.

On voit ainsi que *les séries de sections circulaires des surfaces du second, du troisième et du quatrième degré sont les intersections de faisceaux homographiques de sphères.*
