Nouvelles annales de mathématiques

J. Neuberg

Théorie des indices des points, des droits et des plans par rapport à une surface du second ordre

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 9 (1870), p. 433-439

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1870_2_9__433_0>

THÉORIE DES INDICES DES POINTS, DES DROITES ET DES PLANS PAR RAPPORT A UNE SURFACE DU SECOND ORDRE

(suite et fin, voir 2e série, t. IX, p. 317, 360 et 399);

PAR M. J. NEUBERG,

Professeur à l'Athénée de Bruges (Belgique).

11. Résumons maintenant les principaux résultats que nous venons d'obtenir.

Les définitions des indices proposées par M. Faure sont les expressions les plus simples de ces quantités. Mais pour justifier le nom commun d'*indice* donné à trois quantités relatives aux points, aux droites et aux plans considérés par rapport à une surface du second ordre, il convient, croyons-nous, de suivre la marche que nous avons tracée. L'indice d'une droite se définit alors très-naturellement en fonction de ceux de deux points conjugués, et celui d'un plan en fonction de ceux de trois points conjugués. Réciproquement, l'indice d'un point par rapport à une conique peut se définir en fonction de ceux de deux droites conjuguées; l'indice d'un point par rapport à une surface, en fonction de ceux des arêtes d'un trièdre conjugué; enfin l'indice d'une droite par rapport à une surface, en fonction de ceux de deux plans conjugués.

Les différentes sortes d'involutions, rectiligne, plane, faisceaux de droites, de plans ou de trièdres, jouissent de deux propriétés fondamentales communes :

1° La somme des inverses des indices des éléments conjugués est constante;

2° Le quotient du produit des indices des éléments conjugués, divisé par le carré de la distance de ces éléments (distance de deux points, surface de triangle, sinus d'angle) est constant.

L'involution *solide* formée par l'ensemble des tétraèdres conjugués avec une même surface jouit également de ces propriétés.

Au point de vue analytique, nos résultats ont également une certaine importance; ils donnent la signification géométrique de certaines fonctions (*covariants* et *contrevariants*) qui se présentent fréquemment dans les calculs. Si $f(x) = 0\,[F(xx) = 0]$ est l'équation de la surface en coordonnées ponctuelles et $\psi(p) = 0\,[\Psi(pp) = 0]$ l'équation en coordonnées tangentielles, ces fonctions seront, à des facteurs *invariants* près,

$$\begin{array}{cc} f(x). & \psi(p). \\ \dfrac{1}{\overline{XY}^2}\begin{vmatrix} F(xx) & F(xy) \\ F(yx) & F(yy) \end{vmatrix}, & \dfrac{1}{\sin^2(PQ)}\begin{vmatrix} \Psi(pp) & \Psi(pq) \\ \Psi(qp) & \Psi(qq) \end{vmatrix}, \end{array}$$

$$\frac{1}{\overline{XYZ}^2}\begin{vmatrix} F(xx) & F(xy) & F(xz) \\ F(yx) & F(yy) & F(yz) \\ F(zx) & F(zy) & F(zz) \end{vmatrix}, \quad \frac{1}{\sin^2(P'Q'R')}\begin{vmatrix} \Psi(pp) & \Psi(pq) & \Psi(pr) \\ \Psi(qp) & \Psi(qq) & \Psi(qr) \\ \Psi(rp) & \Psi(rq) & \Psi(rr) \end{vmatrix},$$

où $\overline{XY}$ et $\overline{XYZ}$ représentent la distance de deux points ou la surface du triangle formé par trois points, $\sin(PQ)$ le sinus de l'angle dièdre de deux plans, et $\sin(P'Q'R')$ le sinus de l'angle polaire du trièdre formé par trois plans. Les dernières fonctions ne changent même pas pour tous les couples de points d'une même droite ou les couples de plans tournant autour d'une même droite, etc. Si H et H' désignent les *hessiens* de f et de ψ, les facteurs qui dépendent de f et de ψ peuvent aussi prendre la forme

$$\left(\mathrm{H}\begin{matrix}p & q & r\\ p & q & r\end{matrix}\right),\quad \left(\mathrm{H}'\begin{matrix}x & y & z\\ x & y & z\end{matrix}\right);$$

$$\left(\mathrm{H}\begin{matrix}p & q\\ p & q\end{matrix}\right),\quad \left(\mathrm{H}'\begin{matrix}x & y\\ x & y\end{matrix}\right);$$

$$\left(\mathrm{H}\begin{matrix}p\\ p\end{matrix}\right),\quad \left(\mathrm{H}'\begin{matrix}x\\ x\end{matrix}\right)\ (*).$$

L'analogie nous conduit aussi à examiner la signification géométrique du déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mathrm{F}(xx) & \mathrm{F}(xy) & \mathrm{F}(xz) & \mathrm{F}(xu)\\ \mathrm{F}(yx) & \mathrm{F}(yy) & \mathrm{F}(yz) & \mathrm{F}(yu)\\ \mathrm{F}(zx) & \mathrm{F}(zy) & \mathrm{F}(zz) & \mathrm{F}(zu)\\ \mathrm{F}(ux) & \mathrm{F}(uy) & \mathrm{F}(uz) & \mathrm{F}(uu) \end{vmatrix}.$$

Si nous désignons par V le volume du tétraèdre XYZU, nous aurons

$$6\mathrm{V} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4\\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4\\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4\\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{vmatrix};$$

d'où

$$6\mathrm{VH} = \frac{1}{16}\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) & f_4(x)\\ f_1(y) & f_2(y) & f_3(y) & f_4(y)\\ f_1(z) & f_2(z) & f_3(z) & f_4(z)\\ f_1(u) & f_2(u) & f_3(u) & f_4(u) \end{vmatrix},$$

et, en multipliant de nouveau par 6V,

$$36\mathrm{V}^2\mathrm{H} = \Delta.$$

(*) Nous avons omis certains détails dans les paragraphes précédents, pour ne pas rendre cet article trop long. Ainsi nous n'y avons pas parlé de la fonction $\left(\mathrm{H}\begin{matrix}pqr\\ pqr\end{matrix}\right)$, croyant que le lecteur comblera facilement cette lacune.

Si les quatre points sont conjugués ou

$$F(xy) = F(xz) = \ldots = 0,$$

on a plus simplement

$$36V^2 H = \Delta = f(x) \times f(y) \times f(z) \times f(u);$$

et, comme $I_x = -\dfrac{f(x)}{f(\beta)}, \ldots,\ a^2 b^2 c^2 = -\dfrac{H^3}{B_{44}^2},\ f(\beta) = \dfrac{H}{B_{44}}$, on retrouve

$$a^2 b^2 c^2 = -\frac{36V^2}{I_x I_y I_z I_u}.$$

12. Pour compléter cette étude, nous avons encore à parler de la signification géométrique de l'*émanant* $F(xy)$. Désignons par (X, P_y) la distance du point X au plan polaire du point Y; nous aurons

$$(X, P_y) = \frac{2F(xy)}{\sqrt{f_1^2(y) + f_2^2(y) + f_3^2(y)}},$$

$$(O, P_y) = \frac{2f(\beta)}{\sqrt{f_1^2(y) + f_2^2(y) + f_3^2(y)}};$$

d'où

$$\frac{(X, P_y)}{(O, P_y)} = \frac{F(x, y)}{f(\beta)} = \frac{(Y, P_x)}{(O, P_x)},$$

équation qui convient encore aux coordonnées cartésiennes obliques et aux coordonnées tétraédriques.

Appelons *paramètre du couple de points* X, Y le rapport, pris en signe contraire, des distances du plan polaire de l'un d'eux à l'autre point et au centre de la surface, et représentons ce rapport par N_{xy}; nous aurons

$$N_{xy} = -\frac{F(xy)}{f(\beta)}, \quad N_{xx} = I_x.$$

La notion du paramètre peut servir à interpréter beaucoup de résultats. L'on a, par exemple,

$$I_{xy} = \frac{N_{xy}^2 - N_{xx} N_{yy}}{\overline{XY}^2},$$

et réciproquement $N_{xy}^2 = I_{xy} \times \overline{XY}^2 + I_x I_y$.

Si les points X, Y sont sur la surface, il vient plus simplement

$$I_{xy} = \frac{N_{xy}^2}{\overline{XY}^2}, \quad \text{d'où} \quad N_{xy} = \frac{\overline{XY}^2}{D_{xy}^2},$$

D_{xy} étant la longueur du diamètre parallèle à XY. D'après cela, si nous désignons les paramètres des arêtes XY, XZ, XU d'un tétraèdre inscrit par λ_1^2, λ_2^2, λ_3^2, et ceux des arêtes ZU, YU, YZ par μ_1^2, μ_2^2, μ_3^2, de manière que $\lambda_1 = \frac{XY}{D_{xy}}, \ldots$, l'égalité $36V^2H = \Delta$ donnera

$$\begin{aligned} \frac{36V^2}{a^2b^2c^2} &= (\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 + \lambda_3\mu_3)(-\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 + \lambda_3\mu_3) \\ &\quad \times (\lambda_1\mu_1 - \lambda_2\mu_2 + \lambda_3\mu_3)(\lambda_1\mu_1 - \lambda_2\mu_2 + \lambda_3\mu_3). \end{aligned}$$

Si XYZU et X'Y'Z'U' sont deux tétraèdres quelconques de volumes V et V', on trouve, par le procédé employé ci-dessus,

$$36VV'H = \begin{vmatrix} F(xx') & F(xy') & F(xz') & F(xu') \\ F(yx') & F(yy') & F(yz') & F(yu') \\ F(zx') & F(zy') & F(zz') & F(zu') \\ F(ux') & F(uy') & F(uz') & F(uu') \end{vmatrix}.$$

Si l'on suppose les tétraèdres XYZU et X'Y'Z'U' polaires réciproques par rapport à la surface f, cette égalité peut se transformer en

$$a^2b^2c^2 = -\frac{36VV'}{N_{xx'}N_{yy'}N_{zz'}N_{uu'}};$$

d'où l'on peut conclure le théorème Faure de la question 599.

13. Rapportons la surface f à un tétraèdre de référence $M_1 M_2 M_3 M_4$. Soient x_1, x_2, x_3, x_4 les distances du point variable X aux quatre faces du tétraèdre, (h_1, h_2, h_3, h_4) les quatre hauteurs du tétraèdre, et (a_1, a_2, a_3, a_4) les aires des faces. Si $\Sigma A_{rs} x_r x_s = 0$ est l'équation de la surface, on trouve sans difficulté, pour le paramètre du couple $A_r A_s$, $N_{rs} = -\frac{A_{rs} h_r h_s}{f(\beta)}$. La surface peut donc aussi être représentée par l'équation

$$\sum \frac{N_{rs}}{h_r h_s} x_r x_s = 0 \quad \text{ou} \quad \Sigma N_{rs} a_r a_s x_r x_s = 0.$$

Comme $N_{rr} = I_r$, $N_{rs}^2 = I_{rs} d_{rs}^2 + I_r I_s$, on peut aussi écrire

$$\Sigma I_1 a_1^2 x_1^2 + 2 \Sigma a_1 a_2 (I_1 I_2 + I_{12} d_{12}^2)^{\frac{1}{2}} x_1 x_2 = 0,$$

d_{rs} étant la longueur de l'arête $A_r A_s$. Cette équation a déjà été indiquée par M. Faure (*Nouvelles Annales*, année 1866, p. 8).

Si nous prenons pour coordonnées tétraédriques les volumes V_1, V_2, V_3, V_4 des tétraèdres $XM_2 M_3 M_4, \ldots$, la surface peut se représenter plus simplement par

$$f(V) = \Sigma N_{rs} V_r V_s = 0.$$

Les dix paramètres N_{rs} sont liés par une relation assez simple qui peut s'obtenir comme il suit. Les coordonnées du sommet A_1 étant $(V, 0, 0, 0)$, on doit avoir

$$N_{11} = -\frac{f(V, 0, 0, 0)}{f(\beta)} = -\frac{N_{11} V^2}{f(\beta)}$$

ou

$$f(\beta) = -V^2.$$

Mais l'identité entre les quatre coordonnées tétraédriques étant

$$V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = V,$$

il faut remplacer, dans la valeur de $f(\beta)$ donnée au n° 1, les coefficients k_1, k_2, k_3, k_4 par $\frac{1}{V}$, par suite nous aurons, pour la relation cherchée,

$$\left(H \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}\right) = \Pi,$$

ou

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & N_{11} & N_{12} & N_{13} & N_{14} \\ 1 & N_{21} & N_{22} & N_{23} & N_{24} \\ 1 & N_{31} & N_{32} & N_{33} & N_{34} \\ 1 & N_{41} & N_{42} & N_{43} & N_{44} \end{vmatrix} = 0.$$

Dans les cas particuliers où le tétraèdre de référence est conjugué ou circonscrit par les arêtes, cette identité se réduit à

$$\frac{1}{N_{11}} + \frac{1}{N_{22}} + \frac{1}{N_{33}} + \frac{1}{N_{44}} = -1,$$

$$\sum \frac{1}{N_{11}} - 2 \sum \frac{1}{\sqrt{N_{11} N_{22}}} + 4 = 0.$$

La première a déjà été donnée au n° 3.

Note. — La question 837 a eté resolue aussi par M. Pellet, elève du lycee de Nîmes, et M. D. Thomas, professeur à Oxford.