NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 9 (1870), p. 41-46
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1870_2_9__41_0>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 957

(voir 2ᵉ série, t. VIII, p. 479);

SOLUTION DE MM. A. BOTTIGLIA ET F. ISAIA,
Élèves de M. Genocchi, à Turin.

On décrit sur une droite AB, *comme diamètre, une demi-circonférence* AMB, *et de l'autre côté de la droite* AB *un rectangle* ABB′A′ *ayant pour base* AB *et pour hauteur une droite* BB′ *égale au côté du carré inscrit dans le cercle dont* AB *est le diamètre; puis, d'un point* M *pris arbitrairement sur la demi-circonférence* AMB *on mène aux deux sommets* A′, B′ *du rectangle les droites* MA′, MB′ *qui coupent le diamètre* AB *en des points* C, D. *Démontrer que* $\overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2$.

(FERMAT.)

Les deux triangles semblables AA′C, CMP (*) donnent

$$AC : CP = AA' : MP;$$

les deux triangles aussi semblables MPD, B′BD donnent

$$BD : PD = AA' : MP;$$

de là,

$$AC : CP = BD : PD,$$

(*) La droite MP est la perpendiculaire abaissée du point M sur le diamètre AB.

ou mieux,

$$AC : AP - AC = (AB - AD) : (AD - AP),$$

et composant

$$AP : AC = (AB - AP) : (AB - AD),$$

d'où

$$AP = \frac{AB.AC}{AB - (AD - AC)}.$$

Les deux triangles semblables A′MB′, CMD donnent

$$(AD - AC) : AB = MP : MP + \tfrac{1}{2}AB\sqrt{2};$$

divisant,

$$AB - (AD - AC) : AD - AC = \tfrac{1}{2}AB\sqrt{2} : MP;$$

d'où

$$MP = \frac{(AD - AC)AB\sqrt{2}}{2[AB - (AD - AC)]}.$$

Or, on a

$$\overline{MP}^2 + \overline{AP}^2 = AB.AP;$$

en substituant, dans cette dernière égalité, les valeurs de AP et PM, ci-dessus trouvées, on a

$$4\overline{AB}^2.\overline{AC}^2 + 2\overline{AB}^2.\overline{AD}^2 + 2\overline{AB}^2.\overline{AC}^2 - 4\overline{AB}^2.AC.AD$$
$$= 4\overline{AB}^3.AC - 4\overline{AB}^2.AC.AD + 4\overline{AB}^2.\overline{AC}^2;$$

simplifiant,

$$\overline{AD}^2 + \overline{AC}^2 = 2AB.AC$$

ou

$$\overline{AD}^2 + (AB - BC)^2 = 2AB(AB - BC);$$

enfin, faisant les produits et simplifiant, on a

$$\overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2,$$

ce qu'il fallait démontrer (*).

Nous avons aussi trouvé la solution par la Géométrie analytique; mais elle est trop simple, nous ne l'envoyons pas.

Note. — Le même théorème a été démontré par MM. J. Mouchel, conducteur des Ponts et Chaussées à Albert (Somme); Burtaire, Maître auxiliaire au lycée de Nancy; Chadu, Maître auxiliaire au lycée de Bordeaux; Laverlochère, élève de Mathématiques spéciales au collége Stanislas; Viaud, élève, à la Rochelle; Kruschwitz; H. Lez, à Lorrez-le-Bocage; F.-P. Pourcheiroux, à Paris; O. Callaudreau, à Angoulême; Berger et Chaurin, élèves de la classe de seconde au lycée du Mans.

(*) L'égalité à démontrer : $\overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2$ se réduit à $\overline{CD}^2 = 2.AC.BD$, en y remplaçant respectivement AD, BC, AB par AC + CD, BD + CD, AC + CD + BD. Or, si l'on prolonge la perpendiculaire MP jusqu'à ce qu'elle rencontre la droite A'B' en un point P', la similitude des triangles MA'P', CAA' donnera

$$\frac{MP'}{AA'} = \frac{A'P'}{AC};$$

on aura de même

$$\frac{MP'}{AA'} = \frac{B'P'}{BD}.$$

De là

$$\frac{\overline{MP'}^2}{\overline{AA'}^2} = \frac{A'P'.B'P'}{AC.BD} = \frac{\overline{MP}^2}{AC.BD}.$$

Mais

$$\frac{M'P'}{MP} = \frac{A'B'}{CD};$$

donc

$$\frac{\overline{A'B'}^2}{\overline{AA'}^2} = \frac{\overline{CD}^2}{AC.BD}, \quad \text{ou} \quad 2 = \frac{\overline{CD}^2}{AC.BD}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

(G.)

Sur la question 870

(voir 2e série, t. VIII, p. 463);

PAR M. TERRATS,
Professeur au collége d'Arras.

Dans le numéro d'octobre des *Nouvelles Annales de Mathématiques*, la question 870 se trouve résolue d'une manière fautive, ou plutôt l'auteur de l'article a substitué à la question proposée la question suivante : Trouver le lieu des centres de courbure des sections perpendiculaires à une même génératrice, sur une surface gauche. Après avoir substitué à la surface proposée l'hyperboloïde osculateur le long de la génératrice considérée, il fait, en effet, une série de sections par des plans perpendiculaires à cette génératrice. Ces plans ne sont pas ceux des sections principales, parce que les tangentes aux sections principales en un point de l'hyperboloïde, sont les bissectrices des angles que font les deux génératrices qui passent en ce point. Je proposerai pour la question énoncée par M. Darboux la solution suivante :

Substituons encore à la surface gauche l'hyperboloïde osculateur le long de la génératrice considérée. Mais prenons cette génératrice pour axe des X et non des Z, afin d'éviter l'indétermination qui se présenterait dans le calcul des coefficients différentiels p et q.

L'équation de cet hyperboloïde sera évidemment de la forme

$$(1)\quad A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy + 2C'y + 2C''z = 0.$$

Les équations de la normale au point (x, o, o) sont

$$X = x, \quad \frac{Y}{B''x + C'} = \frac{Z}{B'x + C''}.$$

La surface lieu des normales le long de la génératrice est donc

$$\frac{Y}{B''X+C'}=\frac{Z}{B'X+C''},$$

ou

$$B'XY-B''XZ+C''Y-C'Z=0,$$

équation d'un paraboloïde hyperbolique.

Il reste à trouver une seconde équation. Or, on sait que les Z des centres de courbures principaux en un point (x, y, z) d'une surface, sont donnés par l'équation

$$\begin{aligned}&(rt-s^2)(Z-z)^2\\&\quad-[(1+p^2)t+(1+q^2)r-2pqs](Z-z)+1+p^2+q^2=0.\end{aligned}$$

Il faut ici supposer $z=0$, et calculer

$$p,\ q,\ r,\ s,\ t.$$

Pour cela, différentions l'équation (1) par rapport à x, puis par rapport à y. Nous trouverons

$$(2)\quad\left\{\begin{aligned}&A''zp+Byp+B'z+B'xp+B''y+C''p=0,\\&A'y+A''zq+Bz+Byq+B'xq+B''x+C'+C''q=0.\end{aligned}\right.$$

Différentions maintenant les équations (2) par rapport à x et y. Nous trouverons de même

$$(3)\quad\left\{\begin{aligned}&A''p^2+A''zr+Byr+B'p+B'p+B'xr+C''r=0,\\&A''pq+A''zs+Bp+Bys+B'q+B'xs+B''+C''s=0,\\&A'+A''q^2+A''zt+Bq+Byt+Bq+B'xt+C''t=0.\end{aligned}\right.$$

De ces équations on déduit pour le point $(x, 0, 0)$ les valeurs

$$p=0,\quad q=-\frac{B''x+C'}{B'x+C''},$$

$$r=0,\quad s=-\frac{B'q+B''}{B'x+C''},\quad t=-\frac{A''q^2+Bq+A'}{B'x+C''},$$

qui doivent être substituées dans l'équation simplifiée

$$(4)\qquad s^2Z^2+tZ-(1+q^2)=0.$$

Il faudra ensuite éliminer x entre l'équation obtenue et l'équation $X = x$. Ce qui revient à remplacer dans (4), q, s, t par les valeurs

$$q = -\frac{B''X + C'}{B'X + C''},\ s = -\frac{B'q + B''}{B'X + C''},\ t = -\frac{Aq^2 + Bq + A'}{B'X + C''}.$$

Le résultat sera une équation du quatrième degré entre X et Z. Elle représente un cylindre parallèle à l'axe des Y.

L'intersection de ce cylindre avec le paraboloïde des normales sera la courbe demandée.