NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

J. NEUBERG

# Théorie des indices des points, des droites et des plans par rapport à une surface du second ordre

*Nouvelles annales de mathématiques 2e série*, tome 9 (1870), p. 399-410

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1870_2_9__399_0>

# THÉORIE DES INDICES DES POINTS, DES DROITES ET DES PLANS PAR RAPPORT A UNE SURFACE DU SECOND ORDRE;

(suite, voir 2e série, t IX, p 317 et 360);

PAR M. J. NEUBERG,
Professeur a l'Athenée de Bruges (Belgique).

7. Cherchons l'expression analytique de l'indice d'un plan.

La surface et le plan ayant pour équations

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0,\quad x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-\delta=0,$$

et les coordonnées du pôle de ce plan étant $(x_1, y_1, z_1)$, on a

$$p=-\delta,\quad p'=x_1\cos\alpha+y_1\cos\beta+z_1\cos\gamma-\delta.$$

Mais, en identifiant les deux équations du plan

$$x\cos\alpha+\ldots=0\quad \text{et}\quad \frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}+\frac{zz_1}{c^2}-1=0,$$

on a

$$x_1=\frac{a^2\cos\alpha}{\delta},\ldots;$$

par conséquent, l'indice $\pi$ du plan a pour valeur

$$\pi=-pp'=a^2\cos^2\alpha+b^2\cos^2\beta+c^2\cos^2\gamma-\delta^2.$$

Si la surface et le plan sont donnés par les équations générales $f(x)=\Sigma A_{rs}x_r x_s=0$, $\Sigma p_1 x_1=0$, on a, en désignant par $(\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4)$ les coordonnées du pôle du plan,

$$\pi=-\frac{\Sigma p_1 v_1\times\Sigma p_1\beta_1}{p_1^2+p_2^2+p_3^2}.$$

Mais on doit avoir $\Sigma p_1 x_1 \equiv \frac{1}{2}\lambda\Sigma x_1 f_1(\nu)$, $\lambda$ étant un facteur indéterminé; par conséquent

$$\Sigma p_1 \beta_1 = \tfrac{1}{2}\lambda\,\Sigma\beta_1 f_1(\nu) = \tfrac{1}{2}\lambda\,\Sigma \nu_1 f_1(\beta) = \lambda f(\beta),$$

à cause de $f_1(\beta) = f_2(\beta) = f_3(\beta) = 0$, $2f(\beta) = f_4(\beta)$. En posant $\Sigma p_1 \nu_1 = \mathrm{U}$, on obtient U par l'élimination des $\nu$ entre les cinq équations

$$\tfrac{1}{2}f_r(\nu) = \mathrm{A}_{r1}\nu_1 + \mathrm{A}_{r2}\nu_2 + \mathrm{A}_{r3}\nu_3 + \mathrm{A}_{r4}\nu_4 = \frac{p_r}{\lambda}\ (r = 1, 2, 3, 4),$$

$$p_1\nu_1 + p_2\nu_2 + p_3\nu_3 + p_4\nu_4 = \mathrm{U};$$

il vient ainsi

$$\mathrm{U} = -\frac{\begin{pmatrix}\mathrm{H} & p\\ & p\end{pmatrix}}{\lambda\mathrm{H}}.$$

Par conséquent

$$(9)\qquad \pi = \frac{\begin{pmatrix}\mathrm{H} & p\\ & p\end{pmatrix} f(\beta)}{\mathrm{H}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)}.$$

Cette formule convient aussi aux axes obliques et aux coordonnées tétraédriques, si l'on remplace la somme $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$ par une certaine fonction de $p_1, p_2, p_3, p_4$, et des angles des axes obliques ou des angles du tétraèdre de référence. On peut remarquer que $\begin{pmatrix}\mathrm{H} & p\\ & p\end{pmatrix} = 0$ est l'équation tangentielle de $f$.

L'indice d'un plan s'exprime encore très-élégamment en fonction des coordonnées de trois quelconques de ses points X, Y, Z. En effet, désignons par $p_1, p_2, p_3, p_4$ les mineurs du système

$$(\mathrm{P})\qquad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4\\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4\\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix};$$

l'équation du plan sera $\Sigma t_1 p_1 \equiv \frac{1}{2}\lambda\Sigma t_1 f_1(\nu) = 0$, $t$ représentant les coordonnées courantes. Par suite,

$$\pi = -\frac{\Sigma v_1 p_1 \times \Sigma \beta_1 p_1}{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}.$$

Mais on a $\Sigma \beta_1 p_1 = \lambda f(\beta)$, et les coordonnées $v$ résultent des quatre équations

$$\tfrac{1}{2} f_r(v) = A_{r1} v_1 + A_{r2} v_2 + A_{r3} v_3 + A_{r4} v_4 = \frac{p_r}{\lambda}.$$

Par conséquent,

$$v_1 = \frac{1}{\lambda H} \begin{vmatrix} p_1 & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ p_2 & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ p_3 & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ p_4 & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{vmatrix},$$

et, comme les $p$ sont les mineurs du système (P), on peut obtenir le déterminant à droite en faisant le produit du système (P) par le système

$$\begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{vmatrix}.$$

On en conclut (*)

$$v_1 = \frac{1}{8\lambda H} \begin{vmatrix} f_2(x) & f_3(x) & f_4(x) \\ f_2(y) & f_3(y) & f_4(y) \\ f_2(z) & f_3(z) & f_4(z) \end{vmatrix}.$$

On voit donc que $v_1, v_2, v_3, v_4$ sont égaux aux mineurs du système

$$(\mathrm{P}') \quad \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) & f_4(x) \\ f_1(y) & f_2(y) & f_3(y) & f_4(y) \\ f_1(z) & f_2(z) & f_3(z) & f_4(z) \end{vmatrix},$$

(*) On peut arriver à la même valeur en remarquant que la relation entre le point V et le plan XYZ peut s'exprimer par les équations $\Sigma v_1 f_1(x) = 0$, $\Sigma v_1 f_1(y) = 0$, $\Sigma v_1 f_1(z) = 0$, d'où l'on peut tirer $v_1, v_2, v_3, v_4$.

divisés par $8\lambda H$. La quantité $\Sigma \nu_1 p_1$ peut donc se déduire du produit de deux systèmes d'éléments (P) et (P′), ce qui donne enfin

$$(10)\qquad \pi = -\frac{f(\beta)}{H(p_1^2+p_2^2+p_3^2)}\begin{vmatrix} F(xx) & F(xy) & F(xz) \\ F(yx) & F(yy) & F(yz) \\ F(zx) & F(zy) & F(zz) \end{vmatrix}.$$

Observons que $p_1^2+p_2^2+p_3^2 = 4\overline{XYZ}^2$, et qu'en supposant les trois points X, Y, Z conjugués, ou

$$F(xy) = F(yz) = F(zx) = 0,$$

on retrouve la formule (8).

Si l'on avait remplacé directement, dans la valeur (9), $p_1$, $p_2$, $p_3$ et $p_4$ par les mineurs du système P, on aurait trouvé

$$\left(H\begin{matrix} p \\ p\end{matrix}\right) = -\Sigma B_{rs} p_r p_s = -\left(H'\begin{matrix} x & y & z \\ x & y & z\end{matrix}\right);$$

d'où l'on pourrait également déduire la formule (10).

8. Les faisceaux de droites et de trièdres en involution jouissent de propriétés analogues à celles des deux involutions rectiligne et plane.

Reprenons les figures et les notations du n° 6. Les points $M_2$ et $M_3$ se déplaçant sur la polaire de $M_1$, les droites $M_1M_2$ et $M_1M_3$ forment les rayons conjugués d'un faisceau en involution autour de $M_1$. Or l'on a

$$\mu_{12} = -\frac{\mu_1\mu_2}{\overline{M_1M_2}^2},\qquad \mu_{13} = -\frac{\mu_1\mu_3}{\overline{M_1M_3}^2};$$

d'où

$$\mu_{12}.\mu_{13} = \mu_1\frac{\mu_1\mu_2\mu_3}{\overline{M_1M_2}^2.\overline{M_1M_3}^2},$$

et, comme $M_1M_2\times M_1M_3 = \dfrac{2T}{\sin(M_2M_1M_3)}$, $\dfrac{\mu_1\mu_2\mu_3}{4T^2} = -\dfrac{1}{A^2B^2}$, on trouve cette première formule

$$(11)\qquad \frac{\mu_{12}\,\mu_{13}}{\sin^2(M_2 M_1 M_3)} = -\frac{\mu_1}{A^2 B^2}.$$

On a ensuite

$$\frac{1}{\mu_{12}} + \frac{1}{\mu_{13}} = \frac{1}{\mu_1}\left(\frac{\overline{M_1 M_2}^2}{\mu_2} + \frac{\overline{M_1 M_3}^2}{\mu_3}\right)$$
$$= \frac{\alpha^2}{\mu_1}\left(\frac{\overline{M_1 M_2}^2}{M_2 M_3 . M_2 M_4} + \frac{\overline{M_1 M_3}^2}{M_3 M_2 . M_3 M_4}\right).$$

La dernière parenthèse, d'après un théorème connu (*), est égale à $1 - \dfrac{\overline{M_1 M_4}^2}{M_4 M_2 . M_4 M_3}$, et, comme le produit $M_4 M_2 . M_4 M_3$ est constant, on a aussi

$$(11')\qquad \frac{1}{\mu_{12}} + \frac{1}{\mu_{13}} = \text{const.}$$

Les relations (11) et (11′) peuvent être considérées comme constituant les formules fondamentales des indices des rayons conjugués des faisceaux en involution.

La droite $M_1 M_4$ et la parallèle menée par $M_1$ à $M_2 M_3$ sont deux rayons conjugués du faisceau; l'indice de la première droite est $\dfrac{1}{\beta^2}$, et celui de l'autre $-\dfrac{\mu_1}{\alpha^2}$. Par suite, en vertu de l'égalité (11′),

$$\frac{1}{\mu_{12}} + \frac{1}{\mu_{13}} = \beta^2 - \frac{\alpha^2}{\mu_1},$$

et, à cause de $\dfrac{1}{\mu_1} = -1 - \dfrac{1}{\mu_4}$, $\mu_{23} = -\dfrac{\mu_4}{\alpha^2}$,

$$\frac{1}{\mu_{12}} + \frac{1}{\mu_{13}} = \beta^2 + \alpha^2 - \frac{1}{\mu_{23}},$$

(*) Théorème de Stewart. Voir *Nouvelles Annales de Mathématiques*, année 1859, p. 184 et 208.

ou

$$(12) \qquad \alpha^2 + \beta^2 = A^2 + B^2 = \frac{1}{\mu_{12}} + \frac{1}{\mu_{13}} + \frac{1}{\mu_{23}}.$$

Soient $\lambda_{12}$, $\lambda_{23}$, $\lambda_{31}$ les caractéristiques des droites; comme $\mu_{rs} = -\frac{\lambda_{rs}}{A^2 B^2}$, on a encore

$$(12') \qquad \frac{1}{A^2} + \frac{1}{B^2} = -\left(\frac{1}{\lambda_{12}} + \frac{1}{\lambda_{23}} + \frac{1}{\lambda_{31}}\right).$$

Les égalités (12) et (12′) résolvent la question 919, n$^{os}$ 1 et 2, appliquée aux coniques (*).

Transportons le résultat (12) aux surfaces. Comme $I_{12} = \mu_{12} \times I_5^2, \ldots, \; -I_5 = \frac{D^2}{A^2} = \frac{D'^2}{B^2} = \frac{D^2 + D'^2}{A^2 + B^2}$, nous aurons

$$(13) \qquad -\frac{A^2 + B^2}{I_5} = \frac{1}{I_{12}} + \frac{1}{I_{23}} + \frac{1}{I_{31}}.$$

9. En supposant les points $M_1$, $M_2$, $M_3$ mobiles dans le plan polaire de $M_4$, et constamment conjugués avec la surface, on obtient un faisceau de trièdres (ou de triples droites) en involution jouissant de propriétés analogues

---

(*) En se servant à peu près des mêmes principes que nous, M. de Joncquières a résolu (t. XX, p. 25) la question 534, qui constitue une nouvelle analogie entre les deux involutions rectiligne et plane. *De même que, dans l'involution rectiligne, le point central est un centre radical commun de tous les cercles passant par deux points conjugués, de même dans l'involution plane le point central est un centre radical commun de tous les cercles passant par trois points conjugués.*

Dans l'équation $\frac{1}{\lambda_{12}} + \frac{1}{\lambda_{23}} + \frac{1}{\lambda_{31}} = 0$, on peut reconnaître l'équation en coordonnées trilinéaires du cercle circonscrit au triangle $M_1 M_2 M_3$. Car, si $(h_1, h_2, h_3)$ sont les hauteurs de ce triangle, $(a_1, a_2, a_3)$ les longueurs des côtés et $(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ les distances de O à ces côtés, on a

$$\lambda_{12} = -\delta_3 h_3 = -\frac{2\delta_3 T}{a_3},$$

etc.

à celles des trois involutions précédemment considérées. En effet

$$I_{41} = -\frac{I_4 I_1}{\overline{M_4 M_1}^2},\quad I_{42} = -\frac{I_4 I_2}{\overline{M_4 M_2}^2},\quad I_{43} = -\frac{I_4 I_3}{\overline{M_4 M_3}^2},$$

d'où

$$I_{41} . I_{42} . I_{43} = -I_4^2 \frac{I_1 I_2 I_3 I_4}{\overline{M_4 M_1}^2 . \overline{M_4 M_2}^2 . \overline{M_4 M_3}^2}.$$

Mais $V = \frac{1}{6} M_4 M_1 . M_4 M_2 . M_4 M_3 . \sin(\text{angle solide } M_4)$, $\frac{I_1 I_2 I_3 I_4}{36 V^2} = -a^2 b^2 c^2$; par conséquent

$$\frac{I_{41} I_{42} I_{43}}{\sin^2(\text{angle solide } M_4)} = \frac{I_4^2}{a^4 b^4 c^2} = \text{const.}$$

Désignons de nouveau par $M_6$ et $M_7$ les points centraux de $M_1 M_2$ et $M_3 M_4$, et par $D_{rs}$ le diamètre parallèle à $M_r M_s$. Les droites $M_4 M_3$ et $M_4 M_6$, $M_4 M_5$ et la parallèle à $M_3 M_6$ par $M_4$, font partie d'un faisceau de droites en involution; donc, d'après l'égalité (11'), qui est également applicable aux indices I,

$$\frac{1}{I_{43}} + \frac{1}{I_{46}} = \frac{1}{I_{45}} - \frac{D_{36}^2}{I_4}.$$

De même, les droites $M_4 M_1$ et $M_4 M_2$, $M_4 M_6$ et la parallèle à $M_1 M_2$ par $M_4$ appartiennent à un faisceau en involution et donnent, par conséquent,

$$\frac{1}{I_{41}} + \frac{1}{I_{42}} = \frac{1}{I_{46}} - \frac{D_{12}^2}{I_4}.$$

En ajoutant ces égalités, on a

$$\frac{1}{I_{41}} + \frac{1}{I_{42}} + \frac{1}{I_{43}} = \frac{1}{I_{45}} - \frac{1}{I_4}(D_{36}^2 + D_{12}^2);$$

comme $D_{36}$ et $D_{12}$ sont deux diamètres conjugués de la section centrale parallèle au plan $M_1 M_2 M_3$ et que la somme de leurs carrés est constante, on retrouve la seconde propriété générale des involutions.

Si l'on remplace dans l'égalité précédente $\frac{1}{I_{45}}$ par $D_{45}^2$, $\frac{1}{I_4}$ par $-1-\frac{1}{I_5}$, et ensuite $\frac{D_{36}^2+D_{12}^2}{I_5}$ par $-\left(\frac{1}{I_{12}}+\frac{1}{I_{23}}+\frac{1}{I_{31}}\right)$ (*), il vient

$$D_{45}^2+D_{36}^2+D_{12}^2=a^2+b^2+c^2=\sum_{1234}\frac{1}{I_{rs}},$$

ce qui démontre la question 919, n° 1.

10. Soient D et D' deux droites polaires réciproques par rapport à une surface du second ordre $f$, $M_6$ et $M_7$ leurs points centraux, $M_1$ et $M_2$ deux points conjugués quelconques de D, $M_3$ et $M_4$ deux points conjugués quelconques de D'. Les plans $DM_3$ et $DM_4$ forment une involution autour de D, de même que $D'M_1$ et $D'M_2$ autour de D'. Le tétraèdre $M_1M_2M_3M_4$ est conjugué par rapport à $f$. Soient $(T_1, T_2, T_3, T_4)$ les aires de ses faces et $(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4)$ leurs indices; nous aurons

$$\pi_4=-a^2b^2c^2\frac{I_1I_2I_3}{4T_4^2},$$

$$\pi_3=-a^2b^2c^2\frac{I_1I_2I_4}{4T_3^2};$$

d'où

$$\pi_3\pi_4=a^4b^4c^4\times I_1I_2\frac{I_1I_2I_3I_4}{16T_3^2T_4^2}.$$

Mais $V=\frac{2}{3}\times\frac{T_3T_4\sin(T_3,T_4)}{M_1M_2}$, $\frac{I_1I_2I_3I_4}{36V^2}=-a^2b^2c^2$; par suite

$$\frac{\pi_3\pi_4}{\sin^2(T_3,T_4)}=-a^2b^2c^2\times I_{12}=\text{const.}$$

---

(*) En vertu de la relation (13).

De là on conclut une valeur de $I_{12}$ qui s'accorde avec celle de $I_{pq}$ donnée ci-dessus, lorsqu'on suppose les plans P et Q conjugués ou $\left(H \begin{matrix} p \\ q \end{matrix}\right) = 0$.

On a aussi

$$\frac{1}{\pi_4} + \frac{1}{\pi_3} = \frac{-1}{a^2 b^2 c^2 \times I_1 I_2}\left(\frac{4T_4^2}{I_3} + \frac{4T_3^2}{I_4}\right).$$

Soient $N_3$, $N_4$, $N_7$ les projections orthogonales $M_3$, $M_4$, $M_7$ sur un plan perpendiculaire à $M_1 M_2$ en un point quelconque G; on peut écrire

$$2T_4 = M_1 M_2 \times GN_3, \quad 2T_3 = M_1 M_2 \times GN_4,$$

$$I_3 = \frac{M_3 M_4 \times M_3 M_7}{D_{34}^2} = \frac{N_3 N_4 . N_3 N_7}{D_{34}^2 \sin^2(D, D')},$$

$$I_4 = \frac{N_4 N_3 . N_4 N_7}{D_{34}^2 \sin^2(D, D')},$$

$2D_{34}$ étant la longueur du diamètre parallèle à $M_3 M_4$. La somme $\frac{1}{\pi_3} + \frac{1}{\pi_4}$ peut donc prendre la forme

$$\frac{D_{34}^2 \sin^2(D, D')}{a^2 b^2 c^2 \times I_{12}}\left(\frac{\overline{GN}_3^2}{N_3 N_4 \times N_3 N_7} + \frac{\overline{GN}_4^2}{N_4 N_3 \times N_4 N_7}\right),$$

ou, en vertu du *théorème de Stewart*, la forme

$$\frac{D_{34}^2 \sin^2(D, D')}{a^2 b^2 c^3 \times I_{12}}\left(1 - \frac{\overline{GN}_7^2}{N_7 N_3 \times N_7 N_4}\right),$$

et, comme le produit $N_7 N_3 \times N_7 N_4$ reste constant lorsque les points $M_3$ et $M_4$ se déplacent sur $D'$, on a

$$(14) \qquad \frac{1}{\pi_3} + \frac{1}{\pi_4} = \text{const.}$$

Les faisceaux de plans en involution jouissent donc des propriétés analogues à celles des autres involutions.

La relation exprimée par (14) va nous conduire au théorème 919, n° 2. Mais, avant d'exposer la démonstration, nous ferons observer que l'indice d'un plan peut encore s'exprimer par *moins* l'indice de son point central, multiplié par le carré de la distance du centre de la surface au plan tangent parallèle; car $M_5$ étant le point central du plan $M_1 M_2 M_3$, et $\alpha$ l'angle de ce plan avec la droite $OM_4 M_5$, on a

$$\pi_4 = - M_4 M_5 \times OM_5 \sin^2\alpha, \quad I_5 = \frac{M_5 M_4 . M_5 O}{D^2_{45}};$$

d'où

$$\pi_4 = - I_5 \times D^2_{45} \sin^2\alpha.$$

Si le plan passe par le centre de la surface, dont l'indice vaut $-1$, son indice est égal au carré de la distance du centre au plan tangent parallèle.

Soient maintenant $2A$, $2B$, $2C$ les longueurs des diamètres de la surface suivant les trois directions $M_1 M_2$, $M_3 M_4$, $M_6 M_7$; ces diamètres forment un système de *diamètres conjugués*. Menons par D et par D' des plans parallèles au plan AB; soient $\pi_\delta$ et $\pi_{\delta'}$ leurs indices. Désignons aussi par $\pi_6$ et $\pi_7$ les indices des plans $M_3 M_4 M_6$, $M_1 M_2 M_7$, et par (A, BC) l'inclinaison de la droite A sur le plan des droites B, C. En vertu de la relation (14), on peut écrire

$$\frac{1}{\pi_1} + \frac{1}{\pi_2} = \frac{1}{\pi_{\delta'}} + \frac{1}{\pi_6}, \quad \frac{1}{\pi_3} + \frac{1}{\pi_4} = \frac{1}{\pi_\delta} + \frac{1}{\pi_7}.$$

Mais

$$\pi_{\delta'} = - I_7 \times C^2 \sin^2(C, AB), \quad \pi_\delta = - I_6 \times C^2 \sin^2(C, AB),$$

$$\pi_6 = B^2 \sin^2(B, AC), \quad \pi_7 = A^2 \sin^2(A, BC),$$

$$\frac{1}{I_6} + \frac{1}{I_7} = -1;$$

par conséquent

$$\frac{1}{\pi_1}+\frac{1}{\pi_2}+\frac{1}{\pi_3}+\frac{1}{\pi_4}=\sum\frac{1}{A^2\sin^2(A, BC)}.$$

Le second membre de cette égalité est égal à la somme des carrés des inverses des demi-axes; donc, etc.

La quantité $\sum\frac{1}{\pi_1}$ est susceptible d'une transformation dont nous déduirons une proposition intéressante qui, croyons-nous, n'a pas encore été remarquée. Soient en effet $\delta_1$, $\delta_2$, $\delta_3$, $\delta_4$ les distances du centre aux faces du tétraèdre conjugué; nous aurons

$$\sum\frac{1}{\pi_1}=-\sum\frac{1}{\delta_1 h_1}=-\frac{1}{3V}\sum\frac{T_1}{\delta_1}.$$

En désignant par $M'_1$, $M'_2$,... les angles solides polaires des trièdres $M_1$, $M_2$,... du tétraèdre, un théorème connu donne

$$V^2=\tfrac{2}{9}T_2T_3T_4\sin M'_1;$$

d'où

$$\frac{9V^2}{2T_1T_2T_3T_4}=\frac{\sin M'_1}{T_1}=\frac{\sin M'_2}{T_2}=\ldots.$$

Remplaçons dans l'égalité ci-dessus $T_1$, $T_2$,... par les quantités proportionnelles $\sin M'_1$, $\sin M'_2$,..., et il vient

$$\begin{aligned}\sum\frac{1}{a^2}&=-\frac{2T_1T_2T_3T_4}{27V^3}\sum\frac{\sin M'_1}{\delta_1}\\&=-\frac{2T_1T_2T_3T_4}{27V^3\delta_1\delta_2\delta_3\delta_4}\sum\delta_2\delta_3\delta_4\sin M'_1.\end{aligned}$$

Or $\frac{1}{6}\delta_2\delta_3\delta_4\sin M'_1$ est le volume du tétraèdre qui a pour arêtes $\delta_2$, $\delta_3$, $\delta_4$,...; donc $\frac{1}{6}\sum\delta_2\delta_3\delta_4\sin M'_1$ est le volume du tétraèdre qui a pour sommets les projections du centre de la surface sur les faces du tétraèdre. Soit $V'$ ce volume;

nous pouvons écrire

$$\sum \frac{1}{a^2} = -\frac{4}{9} \frac{T_1 T_2 T_3 T_4}{\delta_1 \delta_2 \delta_3 \delta_4} \frac{V'}{V^3}.$$

Si maintenant $\sum \frac{1}{a^2} = 0$, on doit avoir $V' = 0$; on en conclut que : *Dans tout hyperboloïde dans lequel* $\sum \frac{1}{a^2} = 0$, *les projections du centre de la surface sur les faces d'un tétraèdre conjugué quelconque sont dans un même plan.* Cette proposition peut être considérée comme l'analogue de la suivante : *Dans toute hyperbole équilatère, la circonférence circonscrite à un triangle conjugué passe par le centre.*

(*La suite prochainement.*)