PH. GILBERT

Sur les courbes planes à équations trinômes

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 9 (1870), p. 370-371

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1870_2_9__370_0>

SUR LES COURBES PLANES A ÉQUATIONS TRINOMES;

PAR M. PH. GILBERT.

I. *L'enveloppe de la courbe qui a pour équation*

$$(1)\qquad \left(\frac{x}{x_1}\right)^m + \left(\frac{y}{y_1}\right)^m = 1,$$

les paramètres (x_1, y_1) *devant vérifier l'équation*

$$(2)\qquad \left(\frac{x_1}{a}\right)^p + \left(\frac{y_1}{b}\right)^p = 1,$$

est la courbe

$$(3)\qquad \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{mp}{m+p}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{mp}{m+p}} = 1 \ (*).$$

Cas particuliers. — 1° Si $\frac{mp}{m+p} = 1$, l'enveloppe se réduit à une droite ou à un système de droites; 2° si a, b sont les demi-axes d'une ellipse, menons une droite qui coupe ces axes aux distances du centre $\frac{a^2-b^2}{a}$, $\frac{a^2-b^2}{b}$; projetons un point quelconque de cette droite sur les axes : l'ellipse variable qui a ses sommets aux points de projection a pour enveloppe la développée de l'ellipse proposée.

II. *Soient* ρ et ρ' *les rayons de courbure de la courbe* (1) *et de son enveloppe* (3), *au point de contact.*

(*) Voir *Nouvelles Annales*, 1re serie, t XIII, p. 193.

On a la relation

$$\rho(m-1)=\rho'\left(\frac{mp}{m+p}-1\right),$$

indépendante de a et b.

III. *Le rapport des rayons de courbure d'une ellipse et de sa développée aux points correspondants est le tiers du rapport des portions de leurs tangentes respectives comprises entre les axes.*

IV. Si dans le problème (I) l'on suppose $p=\frac{2m}{m-1}$ et $m>1$, les équations (2) et (3) deviennent respectivement

$$\left(\frac{x_1}{a}\right)^{\frac{2m}{m-1}}+\left(\frac{y_1}{a}\right)^{\frac{2m}{m-1}}=1.$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2m}{m+1}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2m}{m+1}}=1.$$

Soient S *et* S' *les aires de ces deux courbes dans l'angle des coordonnées positives. On a la relation*

$$SS'=\frac{\pi a^2 b^2}{8}\,\frac{m^2-1}{m}\,tg\,\frac{2m}{\pi}.$$