NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ÉDOUARD LUCAS

Note sur les coefficients du binôme de Newton

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 9 (1870), p. 308-311

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1870_2_9__308_0>

NOTE SUR LES COEFFICIENTS DU BINOME DE NEWTON;

PAR M. ÉDOUARD LUCAS (*),
Agregé des Sciences mathematiques.

On sait que, pour une puissance quelconque du binôme, la somme des coefficients de rang pair est égale à la somme des coefficients de rang impair; la même propriété a lieu, avec certaines restrictions, en prenant les coefficients de trois en trois. On considérera les six cas suivants, selon que le reste de la division de l'exposant par 6 sera 0, 1, 2, 3, 4 ou 5 :

Premier cas. — L'exposant de la puissance du binôme est égale à $6n$.

Remarquons d'abord que si l'on désigne par α et α^2 les racines cubiques de l'unité, on aura

$$(1+\alpha)^3 = 2 + 3\alpha + 3\alpha^2 = (1+\alpha^2)^3,$$

et, par suite,

$$(1+\alpha)^{3p} = (1+\alpha^2)^{3p}.$$

Le nombre des coefficients de la puissance $6n$ du binôme est égal à $6n+1$. Appelons :

A la somme des coefficients de rang.	$1, 4, 7, \ldots, (6n+1)$;
B » .	$2, 5, 8, \ldots, (6n-1)$;
C » .	$3, 6, 9, \ldots, 6n$;

nous aurons alors

$$(1+\alpha)^{6n} = A + B\alpha + C\alpha^2$$

(*) La question a été déjà traitée d'une manière générale par M. Catalan, t XX, p. 260. (*Note de la rédaction*) et

$$(1 + \alpha^2)^{6n} = A + C\alpha + B\alpha^2,$$

et, par suite, en retranchant membre à membre, nous déduisons $B = C$.

D'autre part, $(1 + \alpha)^{6n} - 1$ est divisible par $(1+\alpha)^3 + 1$, ou par $3(1 + \alpha + \alpha^2)$: donc $A - 1 + B(\alpha + \alpha^2)$ est divisible par $1 + (\alpha + \alpha^2)$, et, par suite, $A - 1 = B$. Donc :

Les sommes des coefficients de la puissance $6n$ du binôme, pris de trois en trois, deviennent égales entre elles en retranchant l'unité de la première, et leur valeur est $\frac{1}{3}(2^{6n} - 1)$.

Deuxième cas. — L'exposant de la puissance du binôme est égal à $6n + 3$.

On aura, comme précédemment,

$$(1 + \alpha)^{6n+3} = A + B\alpha + C\alpha^2,$$

et aussi $B = C$; et comme $(1 + \alpha)^{6n+3} + 1$ est divisible par $(1 + \alpha)^3 + 1$; on en déduira $A + 1 = B$. Donc :

Les sommes des coefficients de la puissance $6n + 3$ du binôme, pris de trois en trois, deviennent égales en ajoutant l'unité à la première, et leur valeur est $\frac{1}{3}(2^{6n+3} + 1)$.

Troisième cas. — L'exposant de la puissance du binôme est égale à $6n + 1$.

Nous avons en tout $6n + 2$ coefficients, et le groupe C en contient n, les groupes A et B en contiennent $n + 1$; alors

$$(1 + \alpha)^{6n+1} = A + B\alpha + C\alpha^2.$$

On peut faire voir que les groupes A et B contiennent les mêmes coefficients dans un ordre inverse; mais on peut aussi démontrer l'égalité de A et B de la façon suivante. On a

$$(1+\alpha)^{6n+1} = A + C\alpha + B\alpha^2,$$

et, en désignant $(1+\alpha)^{6n} = (1+\alpha^2)^{6n}$ par M,

$$M(1+\alpha) = A + B\alpha + C\alpha^2,$$
$$M(1+\alpha^2) = A + C\alpha + B\alpha^2;$$

et en éliminant M entre ces équations, on déduit

$$(1+\alpha^2)(A + B\alpha + C\alpha^2) - (1+\alpha)(A + C\alpha + B\alpha^2) = 0,$$

ou bien

$$(B - A)(\alpha - \alpha^2) = 0,$$

et, par suite,

$$A = B.$$

D'autre part, on a

$$(1+\alpha)^{6p+1} + \alpha^2 = A + B\alpha + (C\alpha + 1)\alpha^2;$$

mais le reste de la division de $(1+\alpha)^{6p}(1+\alpha) + \alpha^2$ par $(1+\alpha)^3 + 1$ est égal au reste de la division de $1 + \alpha + \alpha^2$ par $(1+\alpha)^3 + 1$; donc $A + B\alpha + (C+1)\alpha^2$ est divisible par $1 + \alpha + \alpha^2$, et l'on a

$$A = B = C + 1.$$

On a donc ce théorème :

Les sommes des coefficients de la puissance $6n+1$ du binôme, pris de trois en trois, deviennent égales en ajoutant l'unité à la dernière, et égales au tiers de $2^{6n+1} + 1$.

Quatrième cas. — L'exposant de la puissance du binôme est égal à $6n + 4$.

On a alors le théorème suivant, analogue au précédent :

Les sommes des coefficients de la puissance $6n + 4$ du binôme, pris de trois en trois, deviennent égales en retranchant l'unité à la dernière, et égales au tiers de $2^{6n+4} - 1$.

Cinquième cas. — L'exposant du binôme est égal à $6n+2$.

Il y a alors $6n+3$ coefficients et $n+1$ par groupes, en tenant compte du dernier qui est l'unité ; on démontrerait, comme ci-dessus, le théorème suivant :

Les sommes des coefficients de la puissance $6n+2$ *du binôme, pris de trois en trois, deviennent égales en retranchant l'unité à la seconde, et égales au tiers de* $2^{6n+2}-1$.

Sixième cas. — L'exposant du binôme est égal à $6n+5$.

On a alors le théorème suivant :

Les sommes des coefficients de la puissance $6n+5$ *du binôme, pris de trois en trois, deviennent égales en ajoutant l'unité à la seconde, et égales au tiers de* $2^{6n+5}+1$.

Remarque. — On aurait d'ailleurs, et par le même procédé, des théorèmes analogues pour les sommes des coefficients pris de quatre en quatre, de cinq en cinq, etc.