

Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 9
(1870), p. 229-237

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1870_2_9_229_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1870, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*

<http://www.numdam.org/>

**SOLUTIONS DE QUESTIONS
PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.**

Question 240

(voir 1^{re} série, t. X, p. 347);

• PAR M. E. PELLET,

Élève au lycée de Nîmes.

La position d'équilibre d'un corps surnageant n'a lieu que lorsque la distance du centre de gravité du liquide déplacé au centre de gravité du corps est un maximum, ou bien encore lorsque le centre commun de gra-

vité du corps et du fluide déplacé est à sa plus haute ou plus basse position. (CLAUSEN.)

Chercher la position d'équilibre d'un corps flottant revient à déterminer un plan tel que : 1° l'une des parties en lesquelles il divise le corps ait un volume donné ; 2° qu'il soit perpendiculaire sur la ligne qui joint le centre de gravité de cette partie, considérée comme homogène, au centre de gravité G du corps, qui peut être de nature hétérogène.

Pour que la première condition soit satisfaite, il faut que le plan soit tangent à une certaine surface S. Soit M un point de cette surface ; P le plan tangent en ce point à la surface S ; M' le centre de gravité du segment déterminé par ce plan, ayant le volume donné. Le point M décrivant la surface S, le point M' décrit une surface S'. Le plan tangent en M' à cette dernière surface est parallèle au plan P. En effet soit (m, p, m') une seconde position du point M, du plan P et du point M'. Les segments déterminés par les plans P et p ont une partie commune qui a un volume V et dont le centre de gravité est en Γ ; les parties non communes ont un volume égal ν , et leur centre de gravité respectivement en g et g'. Le point M' est sur la droite Γg ; et m' sur la droite $\Gamma g'$; et l'on a

$$\frac{\Gamma M'}{\Gamma g} = \frac{\Gamma m'}{\Gamma g'} = \frac{\nu}{V + \nu}.$$

Ainsi la droite M'm' est parallèle à la droite gg'. A la limite, cette dernière est contenue dans le plan P ; donc puisqu'alors M'm' est tangente à S', les tangentes à la surface S' menées par le point M' sont parallèles au plan P, ce qui démontre ce que j'ai avancé. Ainsi la droite M'G, devant être perpendiculaire sur le plan P dans la position d'équilibre, cette droite est normale à la surface S' ; et par conséquent la distance M'G est maximum ou minimum.

Désignons par M'' , le centre de gravité du second segment déterminé par P . Le lieu des points M'' est une seconde surface S'' , telle que le plan tangent en M'' à cette surface est parallèle au plan P . Si le corps est homogène, la droite $M'M''$ passe par le centre de gravité G du corps; de sorte que, dans la position d'équilibre, la droite $M'G$ est aussi normale à la surface S'' . Si le point M' se confond avec G , le point M'' se trouve sur la surface du corps, et alors la droite $M'GM''$ est normale à cette surface. La distance du point G à la surface du liquide est donc alors maximum ou minimum.

Question 615

(voir 2^e série, t. I, p. 155);

PAR M. DE VIRIEU,

Professeur à Lyon.

Soient une progression arithmétique de différence δ_1 , et une série arithmétique d'ordre m_1 , déduite de cette progression; soient une seconde progression arithmétique de différence δ_2 , et une série arithmétique déduite et d'ordre m_2 ; et ainsi de suite jusqu'à la série d'ordre m_n ;

Si l'on multiplie ensemble les premiers termes de ces séries, de même les seconds termes, etc., on obtient une série arithmétique d'ordre $m_1 + m_2 + \dots + m_n$, déduite d'une progression arithmétique à différence,

$$\frac{(m_1 + m_2 + \dots + m_n)!}{m_1! m_2! \dots m_n!} \delta_1 \delta_2 \dots \delta_n.$$

(BÖKLEN) (*).

(*) Une faute d'impression a rendu inintelligible l'énoncé des *Nouvelles Annales de Mathématiques*.

1. m étant un entier absolu autre que zéro, on appelle série arithmétique de l'ordre m , une série dont les différences d'ordre m ont une même valeur non nulle δ , et l'on dit que cette série est déduite de la progression arithmétique à différence δ .

2. Représentons par

$$\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_p, \dots$$

les termes consécutifs d'une série arithmétique d'ordre m ; on peut les considérer comme étant les valeurs successives que prend une même fonction entière d'une variable x , quand on fait croître celle-ci à partir de zéro par des différences égales à 1.

Si ν_x représente cette fonction, on a, en vertu des premiers principes du calcul aux différences,

$$\begin{aligned} \nu_x = \nu_0 + \Delta \nu_0 \frac{x}{1} + \Delta^2 \nu_0 \frac{x}{1} \frac{x-1}{2} + \dots \\ + \Delta^m \nu_0 \frac{x}{1} \frac{x-1}{2} \dots \frac{x-m+1}{m}. \end{aligned}$$

Le deuxième membre est une fonction entière du degré m où le coefficient de la plus haute puissance est $\frac{\Delta^m \nu_0}{m!}$.

La série arithmétique ayant pour terme général ν_x est déduite de la progression arithmétique ayant pour différence la constante non nulle $\Delta^m \nu_0$.

3. En vertu des mêmes principes, toute fonction entière

$$A_p + A_{p-1}x + \dots + A_0x^p,$$

de degré p d'une variable entière x qu'on fait croître à partir de 0 par degrés égaux à 1, a pour différence d'ordre p la constante $p! A_0$; cette fonction est le terme géné-

ral d'une série arithmétique d'ordre p déduite de la progression arithmétique à différence $p' A_0$.

4. Désignons par

$${}_1u_x, {}_2u_x, \dots, {}_h u_x, \dots, {}_n u_x$$

les termes généraux de séries arithmétiques d'ordres

$$m_1, m_2, \dots, m_h, \dots, m_n;$$

ces séries sont déduites de progressions arithmétiques à différences

$$\Delta^{m_1} u_0, \Delta^{m_2} u_0, \dots, \Delta^{m_h} u_0, \dots, \Delta^{m_n} u_0.$$

En vertu du paragraphe 2, on a

$$\begin{aligned} {}_1u_x &= {}_1u_0 + \Delta {}_1u_0 \frac{x}{1} + \Delta^2 {}_1u_0 \frac{x}{1} \frac{x-1}{2} + \dots \\ &\quad + \Delta^{m_1} {}_1u_0 \frac{x}{1} \dots \frac{x-m_1+1}{m_1}, \\ {}_h u_x &= {}_h u_0 + \Delta {}_h u_0 \frac{x}{1} + \Delta^2 {}_h u_0 \frac{x}{1} \frac{x-1}{2} + \dots \\ &\quad + \Delta^{m_h} {}_h u_0 \frac{x}{1} \dots \frac{x-m_h+1}{m_h}, \\ {}_n u_x &= {}_n u_0 + \Delta {}_n u_0 \frac{x}{1} + \Delta^2 {}_n u_0 \frac{x}{1} \frac{x-1}{2} + \dots \\ &\quad + \Delta^{m_n} {}_n u_0 \frac{x}{1} \dots \frac{x-m_n+1}{m_n}. \end{aligned}$$

5. Soit x le terme général d'une série dont chaque terme est le produit des termes de même rang dans les séries arithmétiques du n° 4; on a

$$x = {}_1u_x + {}_2u_x + \dots + {}_h u_x + \dots + {}_n u_x.$$

En vertu des identités du n° 4, x est une fonction entière de degré $m_1 + \dots + m_h + \dots + m_n$, où le coefficient de

la plus haute puissance est $\frac{1}{m_1' m_2' \dots m_n'}$ $\Delta^{m_1} u_0 \dots \Delta^{m_n} u_0$;
 donc, en vertu du paragraphe 3, x est le terme général
 d'une série arithmétique d'ordre $m_1 + \dots + m_k + \dots + m_n$
 déduite de la progression arithmétique à différence

$$\frac{(m_1 + \dots + m_k + \dots + m_n)!}{m_1' \dots m_k' \dots m_n'}$$

C. Q. F. D.

6. *Remarque.* — En suivant la même marche, il est facile de voir que si l'on ajoute terme à terme plusieurs séries arithmétiques, on obtient en général une série arithmétique d'ordre égal à l'ordre le plus élevé des séries données, et ayant pour différence constante la somme des quantités analogues dans les séries de l'ordre le plus élevé.

Il existe une proposition semblable pour les séries obtenues en retranchant terme à terme deux séries arithmétiques.

Question 787

(voir 2^e série, t. VI, p. 480) ;

PAR M. WILLIÈRE.

Déterminer le lieu géométrique du centre d'une sphère qui coupe, sous des angles α, β, γ , trois sphères données A, B, C.

Soient (a, b, c) , (a', b', c') les centres des sphères A, B, C ; r, r', r'' leurs rayons ; R le rayon de la sphère qui coupe les précédentes sous les angles α, β, γ , et (x, y, z) son centre. On a

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2 + R^2 - 2Rr \cos \alpha.$$

Si l'on pose

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 - r^2 = S,$$

l'équation précédente devient

$$(1) \quad S = R^2 - 2Rr \cos \alpha.$$

On a de même

$$(2) \quad S' = R^2 - 2Rr' \cos \beta,$$

$$(3) \quad S'' = R^2 - 2Rr'' \cos \gamma.$$

En éliminant R entre ces trois dernières équations, on trouve

$$(4) \quad \begin{cases} (S - S')(r'' \cos \gamma - r' \cos \beta) = (S' - S'')(r' \cos \beta - r \cos \alpha), \\ 4S''(r' \cos \beta - r \cos \alpha)^2 \\ = (S - S')^2 - 4r'' \cos \gamma (S - S')(r' \cos \beta - r \cos \alpha). \end{cases}$$

La première de ces deux équations représente un plan passant par l'axe radical des trois sphères données. Donc les deux équations prises simultanément représentent une conique située dans ce plan.

Remarquons maintenant que les cosinus qui entrent dans les formules précédentes doivent être précédés chacun du double signe \pm . Par suite, en changeant, dans les équations (4), les signes des cosinus, on obtiendra d'autres lignes répondant encore à la question. On ne pourra d'ailleurs obtenir ainsi que trois nouvelles coniques. Donc le lieu se compose de quatre coniques situées dans des plans qui passent tous par l'axe radical des trois sphères données.

Note. — M. Georges de Villepin, élève du collège Stanislas, nous a envoyé une bonne solution de la question précédente. Il fait remarquer que les quatre coniques percent en huit points le plan des centres des

sphères données ; que ces huit points sont les centres des cercles qui coupent sous les angles α, β, γ les grands cercles déterminés par ce plan dans les sphères A, B, C ; et enfin que ces huit points sont situés deux à deux sur quatre droites passant par le centre radical des trois cercles.

Question 886

(voir 2^e série, t. VII, p. 240) ;

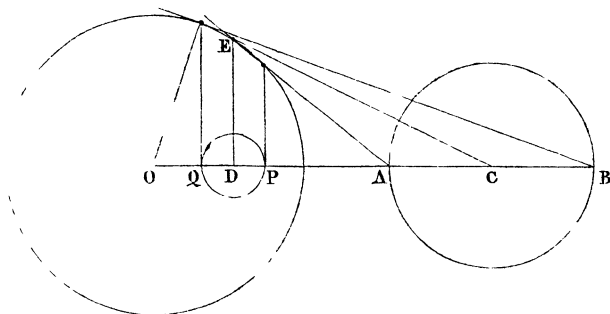
PAR M. PAUL ENDRÈS,

Elève au lycée de Douai.

Étant donnés deux cercles, si l'on prend les polaires de ces cercles par rapport à un cercle quelconque, on obtient deux coniques ; les cercles qui ont pour diamètre les axes focaux de ces coniques se coupent sous le même angle que les cercles donnés.

(H. FAURE.)

On sait que la polaire d'un cercle (C) est une conique ayant pour foyer l'origine O et pour directrice correspondante la polaire DE du centre C du cercle : l'excentricité



est égale au rapport de la distance CO des deux centres au rayon CA du cercle considéré.

Les pieds P, Q des polaires des extrémités du diamètre AB du cercle (C), passant par l'origine O, sont les sommets de cette conique, comme on peut s'en assurer en remarquant que

$$\frac{PO}{PD} = \frac{QO}{QD} = \frac{CO}{CA}.$$

On voit aussi immédiatement que

$$OB \times OQ = OA \times OP = \rho^2.$$

Il en résulte que le cercle décrit sur l'axe focal de la polaire du cercle (C) est le cercle transformé par rayons vecteurs réciproques de ce dernier, l'origine étant le point O, et le module étant le carré du rayon ρ du cercle directeur.

Or deux courbes inverses se coupent sous le même angle que les courbes primitives. Donc les cercles décrits sur les axes focaux des deux coniques polaires des cercles donnés se coupent suivant le même angle que ces derniers.

Note. — La même question a été résolue par M. Willière, professeur à Arlon.
