NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

F. VALLÈS

Réponse aux observations critiques de M. Catalan, insérées dans le numéro d'octobre 1869 des « Nouvelles annales de mathématiques »

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 9 (1870), p. 20-26

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1870_2_9__20_1>

RÉPONSE

aux observations critiques de M. Catalan, insérées dans le numéro d'octobre 1869 des « Nouvelles Annales de Mathématiques » ;

Par M. F. VALLÈS.

C'est certainement par suite d'une méprise que M. Catalan m'a attribué l'opinion que, de la suite d'égalités

$$e^{2\pi\sqrt{-1}} = e^{4\pi\sqrt{-1}} = \ldots = e^{2k\pi\sqrt{-1}}, \tag{A}$$

on peut légitimement déduire la suivante :

$$(B) \qquad e^{-2\pi} = e^{-4\pi} = \ldots = e^{-2k\pi}.$$

Voici, en effet, la reproduction textuelle du passage de mon livre dans lequel il est question de ces faits.

« Pour les géomètres qui considèrent que le développement de e^x, en série, continue de subsister comme vrai lorsque x devient $x\sqrt{-1}$, qui par suite sont obligés d'admettre qu'il est permis d'élever l'expression e^x à la puissance $\sqrt{-1}$, qui indiquent même en fait comment on doit procéder sur e^x pour obtenir le résultat développé de cette opération, il est facile de leur prouver que cette manière de concevoir le mécanisme analytique conduit directement à une impossibilité. En effet, dans la suite d'égalités (A), qu'on élève tous les membres à la puissance $\sqrt{-1}$, et l'on aura $e^{-2\pi} = e^{-4\pi} \ldots = e^{-2k\pi} \ldots$ (B), conséquence complétement inadmissible. »

Il ressort évidemment de la lecture de ce passage que la première des deux propositions que me reproche M. Catalan n'exprime nullement mon opinion sur le point de savoir si les égalités (B) sont des conséquences légitimes des égalités (A) ; elle se borne à constater que, *pour les géomètres qui raisonnent d'après les idées que je viens d'exposer*, cette conséquence est obligatoire et qu'elle les condamne. Mais elle ne l'est pas plus pour moi, qui déclare ne pas savoir quant à présent ce que peut être la puissance $\sqrt{-1}$ d'une quantité réelle, et qui ignore les règles de calcul autorisées pour une pareille expression, qu'elle ne le sera pour tous ceux qui répudient la manière de voir des géomètres précités et qui ont des idées toutes différentes des leurs.

Et non-seulement je suis loin de prétendre que les égalités (B) doivent être considérées comme des déductions acceptables de celles (A), mais je ne saurais même admettre, avec M. Catalan, que la puissance $\sqrt{-1}$ de l'expression $e^{2k\pi\sqrt{-1}}$ a une infinité de valeurs réelles, inégales, formant une progression par quotient et représentées par $e^{-2k\pi}$.

Remarquons d'abord qu'en fait, poser $e^{-2k\pi}$ comme la conséquence de l'élévation de $e^{2k\pi\sqrt{-1}}$ à la puissance $\sqrt{-1}$, c'est admettre implicitement que les règles de l'élévation aux puissances démontrées pour les exposants réels continuent de s'appliquer aux exposants imaginaires, puisque alors $(e^{2k\pi\sqrt{-1}})^{\sqrt{-1}}$ peut s'écrire $e^{2k\pi\sqrt{-1}\sqrt{-1}}$ et devient $e^{-2k\pi}$, ainsi que l'indique M. Catalan. Or, non-seulement cela n'est pas prouvé, mais l'auteur ne niera pas que cela ne soit très-contestable, puisqu'il prétend lui-même que *l'expression puissance* $\sqrt{-1}$ *n'a aucun sens à priori.* Or il paraîtra toujours bien difficile de comprendre comment un résultat certain, rigoureux, qu'on doit accepter avec confiance pourra être engendré par une opération qu'on déclare n'avoir pas de sens. L'hésitation, dans ce cas, nous paraît on ne peut plus légitime.

Il est vrai qu'*à posteriori* l'auteur parvient à déduire un résultat réel de cet entassement d'imaginaires; mais il est facile de faire voir que sa déduction, loin d'être obligatoire, reste toujours sur le terrain conventionnel.

En effet, dit-il, puisque par convention $e^{2k\pi\sqrt{-1}}$ est égal à 1, nous pourrons écrire

$$\left(e^{2k\pi\sqrt{-1}}\right)^{\sqrt{-1}} = 1^{\sqrt{-1}}.$$

Or, si l'on fait $1^{\sqrt{-1}} = y$, on aura, d'après Sturm,

$$ly = \sqrt{-1}\, l(1) = \sqrt{-1}\; 2k\pi\sqrt{-1} = -2k\pi.$$

Mais, ferons-nous observer, si l'expression puissance $\sqrt{-1}$

n'a aucun sens, sur quoi donc pourra-t-on s'appuyer pour se croire autorisé à dire que le logarithme de $1^{\sqrt{-1}}$ doit s'obtenir en se conformant aux règles démontrées pour les exposants réels, et à écrire par conséquent que ce logarithme a pour valeur $\sqrt{-1}\,l(1)$? Puis, en remplaçant dans ce résultat $l(1)$ par $l(e^{2k\pi\sqrt{-1}})$, n'est-ce pas la convention primitive même qu'on reproduit? Or, répéterons-nous, comment cette convention vous autorise-t-elle à affirmer que le logarithme dont il s'agit ne sera autre chose que l'exposant de e, alors que cet exposant est imaginaire et que cette manière de procéder n'a été démontrée que pour le réel.

Sturm, dans son *Cours d'analyse*, s'est bien gardé de rien affirmer à cet égard; après avoir établi la relation *conventionnelle*

$$a + b\sqrt{-1} = e^{\frac{1}{2}l(a^2+b^2)+(2k\pi+\varphi)\sqrt{-1}},$$

ayant recours à une seconde hypothèse, il ajoute : *Si l'on convient* d'appeler *logarithme népérien* de $a + b\sqrt{-1}$ l'exposant imaginaire de e dans l'égalité précédente, on aura, etc.; ce qui revient exactement à dire que les résultats qu'on obtiendra ne subsisteront qu'en vertu de l'hypothèse que les logarithmes des quantités imaginaires s'obtiennent en se conformant aux règles démontrées et suivies pour le réel, et de plus, qu'on le remarque bien, en appliquant ces règles à des expressions qui ne sont que conventionnelles. Pour nous, il nous semble qu'au fond on ne professe guère ici que de l'arbitraire déguisé, quant à la forme, sous le manteau de l'algèbre.

M. Catalan conteste, en second lieu, que la formule

$$(-1)^{\frac{\alpha}{\pi}} = \cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha,$$

que je propose de substituer à celle d'Euler, soit préférable à cette dernière, et voici le raisonnement sur lequel il appuie cette opinion :

« Si l'on pose, dit-il, $\alpha = \frac{p}{q}\pi$, p et q étant des entiers premiers entre eux, la formule devient

$$(-1)^{\frac{p}{q}} = \cos\frac{p}{q}\pi + \sqrt{-1}\sin\frac{p}{q}\pi;$$

celle-ci, évidente lorsque $q = 1$, n'est pas admissible en général. En effet, le premier membre a q valeurs et le second en a seulement une. »

Examinons, à ce sujet, sous quelles conditions on peut dire que $(-1)^{\frac{p}{q}}$ est susceptible de q valeurs.

La quantité -1 est égale à $\cos\pi + \sqrt{-1}\sin\pi$; mais elle reste encore égale à cette même expression lorsqu'on la modifie, par l'addition à π, d'un nombre quelconque de circonférences; de telle sorte qu'on a généralement

$$\cos(2k+1)\pi + \sqrt{-1}\sin(2k+1)\pi = -1.$$

Tant que l'exposant p, auquel on élève cette quantité, est entier et impair, le résultat de l'élévation à la puissance p sera toujours évidemment -1.

Mais si, p restant impair, on prend pour exposant $\frac{p}{q}$, à cause que k est indéterminé, le résultat de l'opération pourra s'écrire $\cos\frac{2k+1}{q}\pi + \sqrt{-1}\sin\frac{2k+1}{q}$, et l'on obtiendra q valeurs, parce que, *en vertu de la variation de k*, la fraction $\frac{2k+1}{q}$ est elle-même susceptible d'en recevoir un nombre q qui sont distinctes.

Ce n'est donc qu'à la condition qu'on introduit tacitement dans la formule la variable k et qu'en définitive on opère sur $(-1)^{\frac{p}{q}(2k+1)}$, qu'il est permis de dire que le premier membre a q valeurs.

Or, si l'on veut, au contraire, que α soit égal, non plus à $\frac{p}{q}(2k+1)\pi$, avec toute la latitude qui résulte de k variable, mais à $\frac{p}{q}\pi$ seulement, comme le suppose M. Catalan, c'est-à-dire si l'on s'impose la condition que k est nul, le premier membre, comme le second, ne sera susceptible que d'une valeur; ce qui fait disparaître l'anomalie signalée.

Le cas où p serait pair se traiterait d'une manière analogue, et nous n'y insisterons pas.

En un mot, ce n'est que par l'introduction non apparente, mais très-réelle, d'une variable k que le premier membre reçoit q valeurs. Mais ces valeurs se réduiront à une seule toutes les fois qu'on fera une hypothèse quelconque détruisant la variabilité de k et assignant à cette quantité une valeur fixe et unique.

Je ne veux pas abuser, en prolongeant cette discussion, de l'hospitalité qui m'a été gracieusement offerte dans les *Annales*. Je ne donnerai donc pas ici à l'exposé de ces points de doctrine très-délicats tout le développement qu'il comporte. Qu'il me soit seulement permis de dire que, dans la publication qui aura pour objet la représentation analytique des directions dans l'espace, je reviendrai sur ces questions avec tous les détails nécessaires; que je m'expliquerai alors sur tout ce qui se rattache aux exposants fractionnaires, non-seulement dans ma formule, mais encore dans celle de Moivre; qu'enfin je compléterai la théorie de cette dernière pour le cas où l'exposant réel α devient $\alpha\sqrt{-1}$, et que je ferai connaître les règles de calcul qui, dans cette circonstance, lui sont applicables.

Je ne saurais clore ces observations sans adresser à M. Catalan tous mes remercîments. Non-seulement je lui dois de la reconnaissance pour l'opinion favorable qu'il a exprimée sur la généralité de mon œuvre, mais encore et surtout pour les réflexions critiques que la lecture du livre lui a inspirées. Cela prouve qu'il m'a étudié avec attention, chose fort rare aujourd'hui et par conséquent très-méritoire pour celui qui la pratique et très-flatteuse pour celui qui en est l'objet. Quelques légers désaccords sur certains détails ne nous feront pas prendre le change sur cette mutualité de pensées qui nous pousse l'un et l'autre vers la recherche de la vérité.