GRANT

Démonstration d'un théorème de géométrie

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 9 (1870), p. 188-189
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1870_2_9__188_0>

DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME DE GÉOMÉTRIE (*);

PAR M. GRANT,
Elève de l'institution Massin.

Un cercle variable, assujetti à passer par un point fixe P, *coupe une conique aux points* A, A′, A″, A‴. *Démontrer que la quantité* $\frac{PA.PA'.PA''.PA'''}{R^2}$ *est constante*, R *étant le rayon du cercle.*

Soient d et d' les distances du point P avec les deux droites AA′ et A″A‴. On a, d'après un théorème connu,

$$PA.PA' = 2dR,$$
$$PA''.PA''' = 2d'R,$$

d'où

$$\frac{PA.PA'.PA''.PA'''}{R^2} = 4dd'.$$

Tout revient à démontrer que dd' est constant. Je prends des axes rectangulaires dont l'origine est en P. Les équations de la conique et du cercle sont

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$
$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by = 0.$$

Pour une certaine valeur de λ, l'équation

$$(1) \qquad (A+\lambda)x^2 + 2Bxy + (C+\lambda)y^2 + \ldots + F = 0$$

devra représenter les deux droites AA′ et A″A‴, c'est-

(*) Ce théorème s'étend à toutes les courbes algébriques; voir (*Comptes rendus*, janvier 1865) une Note de M. Laguerre sur les propriétés générales des courbes algébriques.

à-dire que, si les équations de ces deux droites sont

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - d = 0,$$
$$x\cos\alpha' + y\sin\alpha' - d' = 0,$$

l'équation (1) devra, pour une certaine valeur de λ, être identique à l'équation

$$(x\cos\alpha + y\sin\alpha - d)(x\cos\alpha' + y\sin\alpha' - d') = 0,$$

ou bien

$$x^2\cos\alpha\cos\alpha' + 2xy\sin(\alpha+\alpha') + y^2\sin\alpha\sin\alpha' + \ldots + dd' = 0.$$

J'identifie; l'on a

$$\frac{\cos\alpha\cos\alpha'}{A+\lambda} = \frac{\sin\alpha\sin\alpha'}{C+\lambda} = \frac{\sin(\alpha+\alpha')}{B} = \frac{dd'}{F};$$

d'où

$$\frac{\cos(\alpha+\alpha')}{A-C} = \frac{\sin(\alpha+\alpha')}{B} = \frac{dd'}{F},$$

et, par suite,

$$dd' = \frac{F}{\sqrt{(A-C)^2 + B^2}};$$

ce qui démontre que dd' est constant.