Nouvelles annales de mathématiques

P. de Campoux

Des invariants au point de vue des mathématiques spéciales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 9 (1870), p. 113-123

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1870_2_9__113_1>

DES INVARIANTS AU POINT DE VUE DES MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

(suite et fin, voir 2e série, t. VIII, p. 395);

PAR M. P. DE CAMPOUX.

II. *Géométrie analytique à trois dimensions.*

Nous nous occuperons exclusivement de l'équation du second degré à trois variables lorsque la réduction est faite, dans le cas des surfaces à centre, la surface étant rapportée à son centre, ou, si l'on veut, des invariants des coefficients des termes du second degré.

(Nous supposerons les coordonnées rectangulaires.)

1° *Recherche des invariants.*

Considérons l'équation de la surface rapportée à son centre et à ses plans principaux ; cette équation

$$Sx^2 + S'y^2 + S''z^2 + F = 0$$

nous servira de point de départ.

Si nous prenons des axes rectangulaires quelconques de même origine et que α, α', α'' désignent les cosinus des angles que ox' fait avec les trois axes ox, oy, oz, β, β', β'' les cosinus des angles que oy' fait avec les mêmes droites, et γ, γ', γ'' les cosinus des angles que oz' fait avec ces lignes, nous aurons

$$\begin{aligned} x &= \alpha x' + \beta y' + \gamma z', \\ y &= \alpha' x' + \beta' y' + \gamma' z', \\ z &= \alpha'' x' + \beta'' y' + \gamma'' z'. \end{aligned}$$

Les termes du second degré $Sx^2 + S'y^2 + S''z^2$ se transforment dans les suivants :

$$\begin{aligned} S(\alpha x' + \beta y' + \gamma z')^2 + S'(\alpha' x' + \beta' y' + \gamma' z')^2 \\ + S''(\alpha'' x' + \beta'' y' + \gamma'' z')^2. \end{aligned}$$

Cette expression a la forme

$$Ax'^2 + A'y'^2 + A''z'^2 + 2By'z' + 2B'z'x' + 2B''x'y'$$

et

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} A &= S\alpha^2 + S'\alpha'^2 + S''\alpha''^2, \\ A' &= S\beta^2 + S'\beta'^2 + S''\beta''^2, \\ A'' &= S\gamma^2 + S'\gamma'^2 + S''\gamma''^2, \\ B &= S\beta\gamma + S'\beta'\gamma' + S''\beta''\gamma'', \\ B' &= S\gamma\alpha + S'\gamma'\alpha' + S''\gamma''\alpha'', \\ B'' &= S\alpha\beta + S'\alpha'\beta' + S''\alpha''\beta''. \end{aligned} \right.$$

Nous savons que l'on a entre α, α', α'', β, β', β'',

γ, γ', γ'', les relations

$$\begin{aligned}
\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= 1,\\
\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 &= 1,\\
\alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2 &= 1,\\
\alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' &= 0,\\
\alpha''\alpha + \beta''\beta + \gamma''\gamma &= 0,\\
\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' &= 0.
\end{aligned}$$

Les invariants cherchés ne peuvent se trouver que dans les résultats de l'élimination des cosinus entre les équations (1). Nous allons procéder à cette élimination, en nous servant de la méthode que M. Bertrand a employée pour un autre but dans son Algèbre.

Je multiplie les deux membres de la première, de la sixième et de la cinquième équation du groupe (1) respectivement par α, β, γ; j'obtiens ainsi

$$A\alpha + B''\beta + B'\gamma = S\alpha.$$

En multipliant les deux membres de la sixième, de la deuxième et de la quatrième par α, β, γ, j'ai la relation

$$B''\alpha + A'\beta + B\gamma = S\beta.$$

En multipliant les deux membres de la cinquième, de la quatrième et de la troisième par α, β, γ, j'arrive à l'équation

$$B'\alpha + B\beta + A''\gamma = S\gamma.$$

Ces trois équations peuvent s'écrire de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
(A - S)\alpha + B''\beta + B'\gamma &= 0,\\
B''\alpha + (A' - S)\beta + B\gamma &= 0,\\
B'\alpha + B\beta + (A'' - S)\gamma &= 0.
\end{aligned}$$

Ces trois relations sont homogènes en α, β, γ; elles ne peuvent être satisfaites par $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$; car

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$$

Donc, comme ces équations sont compatibles, le déterminant

$$\begin{vmatrix} A - S & B'' & B' \\ B'' & A' - S & B \\ B' & B & A'' - S \end{vmatrix} = \Delta$$

est nul.

L'équation $\Delta = 0$ est une équation résultant de l'élimination des angles entre les équations (1).

Il est aisé d'en trouver deux autres d'une façon analogue.

Multipliant les deux membres de la première, de la sixième et de la cinquième des équations (1) par α', β', γ', j'ai

$$A\alpha' + B''\beta' + B'\gamma' = S'\alpha'.$$

Multipliant les deux membres de la sixième, de la deuxième et de la quatrième par α', β', γ', j'ai

$$B''\alpha' + A'\beta' + B''\gamma' = S'\beta',$$

et multipliant les deux membres de la cinquième, de la quatrième et de la troisième par α', β', γ', j'arrive à la relation

$$B'\alpha' + B''\beta' + A''\gamma' = S'\gamma'.$$

Ces trois relations donnent la relation suivante indépendante des angles :

$$\begin{vmatrix} A - S' & B'' & B' \\ B'' & A' - S' & B \\ B' & B & A'' - S' \end{vmatrix} = 0.$$

Opérant de même sur les équations (1) en faisant usage des multiplicateurs α'', β'', γ'', l'on arriverait à l'équation

$$\begin{vmatrix} A - S'' & B'' & B' \\ B'' & A' - S'' & B \\ B' & B & A'' - S'' \end{vmatrix} = 0.$$

J'obtiens ainsi trois relations distinctes entre les coefficients A, A', A'', B, B', B'' et S, S', S'', car la lettre S, par exemple, n'est que dans la première, la lettre S' dans la deuxième et la lettre S'' dans la troisième; il est donc impossible de passer d'une combinaison de deux de ces équations à la troisième.

Je dis qu'il est inutile de chercher une équation distincte de ces trois équations et ne contenant pas les angles des axes; car j'imagine qu'il y ait quatre relations distinctes entre les coefficients de l'équation de l'ellipsoïde

$$(1)\quad Ax'^2 + A'y'^2 + A''z'^2 + 2By'z' + 2B'z'x' + 2B''x'y' - 1 = 0$$

et les coefficients de l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

On peut toujours supposer $F = -1$ sans nuire à la généralité.

Les quatre relations entre les coefficients de l'équation (1) et a, b, c, qu'on peut supposer connus, et la connaissance de deux points suffiraient pour déterminer l'ellipsoïde. Ainsi le centre, les axes et deux points suffiraient pour déterminer un ellipsoïde, c'est-à-dire que huit conditions suffiraient dans le cas où nous savons que neuf sont nécessaires.

Ainsi ces trois équations sont les seules distinctes; je vais maintenant en tirer les invariants. Si je représente l'une quelconque des trois quantités S, S', S'' par z, il est aisé de voir que ces trois quantités S, S', S'' satisfont à l'équation du troisième degré

$$\begin{vmatrix} A - z & B'' & B' \\ B'' & A' - z & B \\ B' & B & A'' - z \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$(A - z)(A' - z)(A'' - z) - (A - z)B^2 \\ - (A' - z)B'^2 - (A'' - z)B''^2 + 2BB'B'' = 0,$$

ou en ordonnant

$$z^3 - (A + A' + A'')z^2 \\ + (A'A'' - B^2 + A''A - B'^2 + AA' - B''^2)z \\ + AA'A'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2 + 2BB'B'' = 0,$$

que je mettrai sous la forme

$$z^3 + Pz^2 + Qz + R = 0.$$

Or

$$P = -(S + S' + S'')$$

et comme

$$S = -\frac{F}{a^2},$$

a étant l'axe principal qui coïncide avec l'ancien axe des x, et que

$$S' = -\frac{F}{b^2}, \quad S'' = -\frac{F}{c^2},$$

b et c étant les autres axes principaux; or F ne change pas lorsque l'origine reste la même; donc

$$P = -F\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right).$$

P est un invariant.

De même

$$Q = S'S'' + S''S + SS' = \frac{F^2}{b^2c^2} + \frac{F^2}{c^2a^2} + \frac{F^2}{a^2b^2}$$
$$= F^2\left(\frac{1}{b^2c^2} + \frac{1}{c^2a^2} + \frac{1}{a^2b^2}\right).$$

Donc Q est un invariant.

$$R = -SS'S'' = \frac{F^3}{abc},$$

R est aussi un invariant.

Donc

$$A + A' + A'', \quad B^2 - A'A'' + B'^2 - A''A + B''^2 - AA',$$
$$AA'A'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2 + 2BB'B''$$

sont trois invariants. Or il ne peut y avoir plus de trois invariants distincts, car il ne peut y avoir plus de trois équations ne contenant pas les angles que font entre eux les différents axes, comme nous l'avons prouvé; ce sont donc les seuls invariants distincts, c'est-à-dire qu'on peut obtenir tous les autres à l'aide de ceux-là. Nous arrivons donc à cette conclusion que, dans la transformation des coordonnées, les termes du second degré fournissent trois invariants et que ces invariants sont les coefficients de l'équation en S.

2° *Interprétation géométrique des invariants.*

Considérons d'abord $A + A' + A''$.

Si nous faisons dans l'équation de l'ellipsoïde par exemple

$$y = 0, \quad z = 0,$$
$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy + F = 0,$$

on a

$$A = -\frac{F}{r^2},$$

c'est-à-dire que A est proportionnel à l'inverse du carré du demi-diamètre compté sur l'axe des x; nous le représenterons par a'^2 :

$$A = -\frac{F}{a'^2}:$$

de même

$$A' = -\frac{F}{b'^2}, \quad A' = -\frac{F}{c'^2}.$$

Comme c'est un invariant, a, b, c désignant les axes, on aura

$$-\frac{F}{a'^2}-\frac{F}{b'^2}-\frac{F}{c'^2}=-\frac{F}{a^2}-\frac{F}{b^2}-\frac{F}{c^2}$$

ou

$$\frac{1}{a'^2}+\frac{1}{b'^2}+\frac{1}{c'^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}.$$

Je figure la pyramide trirectangle $o\mathrm{A}'\mathrm{B}'\mathrm{C}'$, dont les arêtes ont pour longueurs a', b', c',

$$\frac{1}{a'^2}+\frac{1}{b'^2}+\frac{1}{c'^2}=\frac{b'^2c'^2+c'^2a'^2+a'^2b'^2}{a'^2b'^2c'^2}.$$

Or

$$b'c'=2\,\mathrm{B}'o\mathrm{C}'=2\,\mathrm{A}'\mathrm{B}'\mathrm{C}'\cos\alpha',$$

α' étant l'angle de la face $\mathrm{A}'\mathrm{B}'\mathrm{C}'$ avec la face $\mathrm{B}'o\mathrm{C}'$; de même

$$c'a'=2\,\mathrm{A}'\mathrm{B}'\mathrm{C}'\cos\beta',$$

β' étant l'angle de la face $\mathrm{A}'\mathrm{B}'\mathrm{C}'$ avec la face $\mathrm{C}'o\mathrm{A}'$ et

$$a'b'=2\,\mathrm{A}'\mathrm{B}'\mathrm{C}'\cos\gamma',$$

γ' étant l'angle de la face $\mathrm{A}'\mathrm{B}'\mathrm{C}'$ avec la face $\mathrm{A}'o\mathrm{B}'$; on aura donc

$$\begin{aligned}b'^2c'^2+c'^2a'^2+a'^2b'^2&=4\,\overline{\mathrm{A}'\mathrm{B}'\mathrm{C}'}^2(\cos^2\alpha'+\cos^2\beta'+\cos^2\gamma')\\&=4\,\overline{\mathrm{A}'\mathrm{B}'\mathrm{C}'}^2.\end{aligned}$$

D'ailleurs

$$a'b'c'=2\,\mathrm{C}'o\mathrm{B}'\times o\mathrm{A}'=6\ \text{vol.}\,o\mathrm{A}'\mathrm{B}'\mathrm{C}'=6\,\mathrm{A}'\mathrm{B}'\mathrm{C}'\times\mathrm{H}',$$

H' étant la distance du point o à la face $\mathrm{A}'\mathrm{B}'\mathrm{C}'$; donc

$$\frac{1}{a'^2}+\frac{1}{b'^2}+\frac{1}{c'^2}=\frac{4}{36}\,\frac{\overline{\mathrm{A}'\mathrm{B}'\mathrm{C}'}^2}{\overline{\mathrm{A}'\mathrm{B}'\mathrm{C}'}^2\times\mathrm{H}'^2};$$

donc

$$\mathrm{H}'=\mathrm{H},$$

et l'on conclut que dans tout ellipsoïde les plans passant par les extrêmes de trois diamètres rectangulaires enveloppent une sphère.

Considérons l'invariant

$$AA'A'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2 + 2BB'B''.$$

Je considère le diamètre conjugué de l'axe des z dont les équations sont

$$f'_x = 0, \quad f'_y = 0$$

ou

$$\begin{aligned} A\,x + B''y + B'z &= 0, \\ B''x + A'y + Bz &= 0. \end{aligned}$$

On tire de ces équations

$$\frac{x}{z} = \frac{BB'' - A'B'}{AA' - B''^2},$$

$$\frac{y}{z} = \frac{B'B'' - AB}{AA' - B''^2}.$$

Or l'équation de la courbe peut se mettre sous la forme

$$xf'_x + yf'_y + zf'_z + 2F = 0.$$

Si l'on porte dans cette équation les valeurs de $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$ qui annulent f'_x et f'_y, on aura

$$z^2\left(B'\frac{x}{z} + B\frac{y}{z} + A''\right) = -2F$$

ou

$$z^2(2BB'B'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2 + AA'A'') = -2F(AA' - B''^2).$$

Si je représente la quantité entre parenthèses par Δ, j'aurai

$$\Delta . z^2 = -2F(A'A - B''^2).$$

Or on sait (I, 2°) que

$$A'A - B''^2 = \frac{16F^2}{P^2},$$

P étant le parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués dans le plan des xy.

Remplaçant $A'A'' - B^2$ par cette valeur, nous avons

$$\Delta z^2 = -\frac{32 F^3}{P^2};$$

donc

$$\Delta = -\frac{32 F^3}{P^2 z^2}.$$

Or Pz est le produit de la base du parallélépipède construit sur le diamètre du plan des xy et deux diamètres conjugués de ce plan par la hauteur z de ce parallélépipède. Ce parallélépipède est donc constant, c'est-à-dire que le parallélépipède construit sur trois diamètres conjugués est constant.

Considérons enfin l'invariant

$$B^2 - A'A'' + B'^2 - A''A + B''^2 - AA';$$

on a (I, 2°)

$$-B^2 + A'A'' = \frac{16 F^2}{P^2},$$

P étant la surface du parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués dans le plan des yz. Or, H étant la hauteur du parallélépipède construit sur trois diamètres conjugués, dont deux sont dans le plan des yz, on a, d'après l'interprétation géométrique de l'invariant précédent,

$$PH = K,$$

K étant une constante; donc

$$\frac{16 F^2}{P^2} = \frac{16 F^2}{K^2} H^2.$$

Par conséquent, on aura

$$A'A'' - B^2 = \frac{16 F^2}{K^2} H^2,$$

pareillement

$$A''A - B'^2 = \frac{16F^2}{K^2} H'^2,$$

et

$$AA' - B''^2 = \frac{16F^2}{K^2} H''^2;$$

donc l'invariant en question est égal à

$$\frac{16F^2}{K^2}(H^2 + H'^2 + H''^2).$$

Or H est la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan tangent parallèle aux yz, de même H′ est la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan tangent parallèle aux zx et H″ est la perpendiculaire au plan tangent parallèle aux xy. Ces plans tangents sont respectivement perpendiculaires; donc la somme des carrés des distances du centre à trois plans tangents rectangulaires à l'ellipsoïde est constante, c'est-à-dire, par une conclusion bien aisée à tirer, que le lieu des sommets est une sphère.