ANDRÉ

Questions 912 et 913

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 8 (1869), p. 78-81

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1869_2_8__78_0>

Questions 912 *et* 913

(voir 2^e serie, t VII, p 48),

PAR M. ANDRÉ,

Ancien élève de l'École Normale, Professeur à Sainte-Barbe.

I.

THÉORÈME. — *Étant données deux suites de n nombres entiers $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$, dont les termes se correspondent de telle sorte qu'on ait*

$$a_1 b_1 = a_2 b_2 = a_3 b_3 = \ldots = a_n b_n = \mathrm{P},$$

si l'on désigne par D_a le plus grand commun diviseur, et par M_a le plus petit commun multiple des nombres de la première suite, par D_b le plus grand commun diviseur, et par M_b le plus grand commun multiple des nombres de la seconde, on a

$$\mathrm{M}_a \mathrm{D}_b = \mathrm{M}_b \mathrm{D}_a = \mathrm{P}.$$

Première démonstration. — Soit p un facteur premier qui a α pour plus fort exposant dans la première suite, β pour plus faible exposant dans la seconde : il y aura évidemment dans P un exposant égal à $\alpha + \beta$. Or, ce même facteur premier entrera dans M_a avec l'exposant α, dans D_b avec l'exposant β, et, par suite, dans $\mathrm{M}_a \mathrm{D}_b$ avec l'exposant $\alpha + \beta$. Donc

$$\mathrm{M}_a \mathrm{D}_b = \mathrm{P}.$$

De même

$$\mathrm{M}_b \mathrm{D}_a = \mathrm{P}.$$

Deuxième démonstration. — Nous nous appuierons sur ce lemme connu : « Pour qu'un multiple de plusieurs nombres soit le plus petit commun diviseur de ces nombres, il faut et il suffit qu'en le divisant séparément par chacun d'eux, on obtienne des quotients premiers entre eux. »

Cela posé, si l'on a $x = \frac{P}{D_b}$, x est le plus petit commun multiple des nombres de la première suite. En effet, x est un multiple commun de ces nombres, car il est égal à l'un quelconque d'entre eux, multiplié par le quotient qu'on obtient en divisant par D_b le nombre correspondant de la seconde suite; de plus, x est le plus petit commun multiple de ces nombres, car en le divisant séparément par chacun d'eux, on obtient les mêmes quotients qu'en divisant par D_b les nombres de la seconde suite, c'est-à-dire des nombres premiers entre eux. Donc $x = M_a$. Donc

$$M_a D_b = P.$$

De même

$$M_b D_a = P.$$

II.

De ce théorème résultent immédiatement les corollaires suivants :

Corollaire I. — Le plus petit commun multiple de plusieurs nombres est égal à un multiple commun quelconque de tous ces nombres divisé par le plus grand commun diviseur des quotients qu'on obtient en divisant ce multiple séparément par chacun des nombres donnés.

Corollaire II. — Le plus grand commun multiple de plusieurs nombres est égal à un multiple commun quelconque de tous ces nombres divisé par le plus petit commun multiple des quotients qu'on obtient en divisant ce multiple séparément par chacun des nombres donnés.

Corollaire III. — En multipliant le plus petit commun multiple des produits K à K de n nombres par le plus grand commun diviseur des produits $n-K$ à $n-K$, on obtient le produit des n nombres donnés.

Corollaire IV. — Le plus petit commun multiple de n nombres est égal au produit de tous ces nombres divisé par le plus grand commun diviseur de leurs produits $n-1$ à $n-1$. (Question 912.)

Corollaire V. — Le plus grand commun diviseur de n nombres est égal au produit de tous ces nombres divisé par le plus petit commun multiple de leurs produits $n-1$ à $n-1$. (Question 913.)

Note du Rédacteur.—La question 913 est intéressante parce qu'elle est la généralisation d'un théorème bien connu relatif au plus grand commun diviseur de deux nombres.

Le théorème que démontre M. André, et dont il déduit les solutions des questions 912 et 913, est de M. Le Besgue; on le trouve énoncé dans ses *Exercices d'Analyse numérique* (Paris, 1819), p. 32, sous la forme suivante : *En nommant* D *le plus grand commun diviseur, m le plus petit multiple de plusieurs nombres a, b, c,..., on a toujours*

$$abc\ldots = \mathrm{P} = \mathrm{D}(a, b, c, \ldots) \times m\left(\frac{\mathrm{P}}{a}, \frac{\mathrm{P}}{b}, \frac{\mathrm{P}}{c}, \ldots\right).$$

M. Le Besgue fait remarquer que si les deux suites

$$\begin{array}{lll} a_1 & a_2 & a_3, \ldots, \\ b_1 & b_2 & b_3, \ldots, \end{array}$$

sont telles que

$$a_1 b_1 = a_2 b_2 = a_3 b_3 = \ldots = \mathrm{P},$$

comme P est multiple de tous les nombres a et aussi de tous les nombres b, et que le plus petit multiple commun divise un multiple commun quelconque, on a

$$P = D(a_1, a_2, a_3, \ldots)\, m(b_1, b_2, b_3, \ldots).$$

C'est le théorème démontré par M. André.

M. Demartres, de Mezin (Lot-et-Garonne), nous a adressé une solution des questions **912** et **913** qui ne diffère pas essentiellement de celle de M. André.