NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

LOUIS SALTEL

Composition de l'École normale (1869)

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 8 (1869), p. 438-450

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1869_2_8__438_0>

COMPOSITION DE L'ÉCOLE NORMALE (1869);

PAR M. LOUIS SALTEL,
Élève du lycée de Lille, ancien elève du lycée Louis-le-Grand.

Étant donnés un rectangle et un point P *dans le plan de ce rectangle, par le point* P, *on mène une droite quelconque* PQ, *et l'on imagine les deux coniques qui passent par les quatre sommets du rectangle et qui sont tangentes à la droite* PQ. *Soient* E *et* E' *les deux points de contact et* M *le point milieu de la droite* EE'. *On demande l'équation du lieu décrit par le point* M, *quand on fait tourner la droite* PQ *autour du point* P. *On construira le lieu dans les hypothèses suivantes : le rectangle se réduit à un carré dont le côté est* $2a$, *et, si l'on prend pour axes de coordonnées les parallèles aux côtés du carré menées par son centre, les coordonnées du point* P *sont* $x = \frac{a}{4}$, $y = \frac{a}{2}$.

PRÉLIMINAIRES.

Afin de ne rien emprunter à des théories étrangères au programme du Cours de Mathématiques spéciales, nous allons rappeler quelques notions préliminaires.

(a) DÉFINITION. — On dit que six points, se correspondant deux à deux sur une droite, sont en *involution* lorsqu'on peut déterminer sur cette droite un point O tel que l'on ait

$$OA \times OA' = OB \times OB' = OC \times OC'.$$

(b) THÉORÈME. — *Une sécante quelconque rencontre* *trois cercles ayant même axe radical, en six points, qui sont en involution.*

Le point O étant sur l'axe radical, a même puissance par rapport aux trois cercles.

Donc

$$OA \times OA' = OB \times OB' = OC \times OC'.$$

(*c*) Exemple algébrique. — *Si l'on prend, à partir d'une origine quelconque, des longueurs représentées par les racines des équations*

$$\rho^2 + p\rho + q = 0,$$
$$\rho^2 + p'\rho + q' = 0,$$
$$\rho^2 + p\rho + q + \lambda(\rho^2 + p'\rho + q') = 0,$$

on a six points se correspondant deux à deux et formant une involution.

En effet, prenons pour axe des x la droite sur laquelle se trouvent les points, pour origine l'origine déjà fixée (axes rectangulaires), et considérons :

1° Les deux cercles

$$y^2 + \rho^2 + p\rho + q = 0,$$

passant par A et A',

$$y^2 + \rho^2 + p'\rho + q' = 0,$$

passant par B et B';

2° Le cercle

$$y^2 + \rho^2 + p\rho + q + \lambda(y^2 + \rho^2 + p'\rho + q') = 0,$$

passant par l'intersection des deux premiers.

On a vu que toute sécante les coupe suivant six points formant une involution, en particulier l'axe des ρ, que l'on obtient en faisant $y = 0$.

Donc

$$OA \times OA' = OB \times OB' = OC \times OC'.$$

(*d*) Théorème de Desargues. — *Si l'on considère une conique passant par l'intersection de deux autres, toute sécante coupe ces trois coniques suivant six points se correspondant deux à deux sur chaque conique et formant une involution.*

Soient les coniques $U = 0$, $V = 0$, $U + \lambda V = 0$; par l'origine, menons une sécante $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \rho\,(\alpha^2 + \beta^2 = 1)$, les distances des points obtenus à l'origine des coordonnées sont racines d'équations de la forme

$$\rho^2 + p\rho + q = 0,$$
$$\rho^2 + p'\rho + q' = 0,$$
$$\rho^2 + p\rho + q + \lambda(\rho^2 + p'\rho + q') = 0.$$

Donc ils sont *en involution.*

(*e*) Corollaire. — *Il y a deux coniques tangentes à une droite donnée et passant par l'intersection de deux coniques données.*

Considérons la sécante et les trois coniques précédentes; pour un certain point O, on a

$$OA \times OA' = OB \times OB' = OC \times OC'.$$

Supposons que la sécante devienne tangente à la conique C, la nouvelle relation sera

$$OA \times OA' = OB \times OB' = \overline{OC}^2,$$

relation qui donne géométriquement le point O et les points de contact; connaissant les quatre points (AA'), (BB'), il suffit évidemment d'appliquer la construction suivante :

Par les points (AA'), (BB') *et un point arbitraire, décrivez deux cercles; tracez leur axe radical jusqu'au point* O, *où il rencontre la sécante; menez ensuite du* *point* O *la tangente à l'un des cercles, et décrivez du même point, comme centre, avec un rayon égal à la longueur de la tangente, une circonférence qui coupera la sécante aux points de contact.*

Le point O porte le nom de *point central*, et les points de contact s'appellent *points doubles.*

(f) Détermination algébrique du point central. — Soient une sécante $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \rho$, et les points

$$\rho^2 + p\rho + q = 0, \quad \rho^2 + p'\rho + q' = 0.$$

Considérons les deux cercles

$$y^2 + \rho^2 + p\rho + q = 0,$$
$$y^2 + \rho^2 + p'\rho + q' = 0;$$

ils passent par (AA'), (BB'); leur axe radical a pour équation

$$(p - p')\rho + q - q' = 0,$$

équation du premier degré qui détermine le point central

$$\rho = \frac{q' - q}{p - p'}.$$

Si l'on applique aux deux coniques

$$(\gamma) \quad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

$$(\delta) \quad A'x^2 + 2B'xy + C'y^2 + 2D'x + 2E'y + F' = 0,$$

et à la sécante

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \rho,$$

on trouve immédiatement

$$(\theta) \quad \rho = \frac{F'(A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2) - F(A'\alpha^2 + 2B'\alpha\beta + C'\beta^2)}{\left\{\begin{array}{l} 2[(D\alpha + E\beta)(A'\alpha^2 + 2B'\alpha\beta + C'\beta^2) \\ \quad - (D'\alpha + E'\beta)(A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2)] \end{array}\right\}}.$$

(*g*) Détermination algébrique des points doubles. — En transportant l'origine au point O, les points doubles sont racines de l'équation

$$x^2 = \left(\frac{q'-q}{p-p'}\right)^2 + p\,\frac{q'-q}{p-p'} + q;$$

en revenant à l'origine primitive,

$$(p-p')x^2 - 2(q'-q)x - p(q'-q) - q(p'-p) = 0.$$

(*h*) Ces considérations géométriques et algébriques posées, il est évident que la question proposée est un cas particulier de la suivante.

Problème. — *Par un point* P, *pris à volonté dans le plan de deux coniques, on mène une transversale quelconque, on imagine les deux coniques réelles ou imaginaires qui passent par leur intersection et qui sont tangentes à la transversale aux points* E *et* E'; *on demande le lieu du point milieu de la droite* EE'.

(*i*) Ordre de la courbe. — Sur chaque sécante issue du point P, la construction indiquée en (*e*) ne donne qu'un seul point du lieu; donc l'ordre de la courbe est égal à *l'ordre de multiplicité du point* P *plus un*.

(*k*) Ordre de multiplicité du point P. — Chercher le degré de multiplicité du point P, c'est chercher le nombre des sécantes donnant, pour point correspondant du lieu, le point P. Cela aura lieu toutes les fois que le point P aura même puissance par rapport aux deux courbes, c'est-à-dire qu'on aura

$$PA \times PA' = PB \times PB'.$$

Cette égalité montre clairement que les transversales demandées sont déterminées par le point P et les points communs aux deux lieux géométriques suivants :

Par un point P *pris dans le plan de deux coniques, on mène une transversale quelconque qui rencontre les deux coniques en des points* (A A′), (B B′); *on prend sur cette droite des points* M *et* M′, *tels que*

$$\overline{\mathrm{PM}}^2 = \mathrm{PA} \times \mathrm{PA'}, \quad \overline{\mathrm{PM'}}^2 = \mathrm{PB} \times \mathrm{PB'}:$$

lieux des points M et M′.

Il est évident, géométriquement, que ces lieux se composent de deux coniques respectivement homothétiques aux coniques proposées, et ayant le point P pour centre commun.

Les sécantes demandées sont les deux rayons communs à ces deux courbes.

Donc le lieu est du troisième ordre, et les tangentes au point P sont les deux sécantes que l'on vient de déterminer.

Si l'on cherche, du reste, les équations des lieux précédents, le point P étant toujours pris pour origine, et les coniques ayant pour équation (γ) et (δ), on trouve

$$\begin{gathered} \mathrm{A}x^2 + 2\mathrm{B}xy + \mathrm{C}y^2 = \mathrm{F}, \\ \mathrm{A}'x^2 + 2\mathrm{B}'xy + \mathrm{C}'y^2 = \mathrm{F}'. \end{gathered}$$

Les rayons communs ont pour équation

$$\mathrm{F}'(\mathrm{A}x^2 + 2\mathrm{B}xy + \mathrm{C}y^2) = \mathrm{F}(\mathrm{A}'x^2 + 2\mathrm{B}'xy + \mathrm{C}'y^2).$$

Remarquons que, sans rien particulariser, nous pouvons supposer que l'une des coniques (δ), (γ) est celle qui passe par les quatre points *donnés* et par le point P. Ce que l'on exprimera en faisant soit $\mathrm{F} = 0$ ou $\mathrm{F}' = 0$. Supposons $\mathrm{F} = 0$, les deux tangentes au point double seront dès lors représentées par l'équation

$$\mathrm{A}x^2 + 2\mathrm{B}xy + \mathrm{C}y^2 = 0.$$

(*l*) Détermination géométrique des tangentes au point double. — *On construira la conique passant par les quatre points donnés et le point* P; *les directions asymptotiques issues du point* P *seront les tangentes.*

Dès lors le point P sera :

1° Un point double réel, si la conique qui passe par les quatre points et le point P est une hyperbole;

2° Un point de rebroussement, si la conique est une parabole;

3° Un point isolé, si cette conique est une ellipse.

Or on sait que les régions où doit se trouver le point P pour donner une ellipse ou une hyperbole sont séparées par les deux paraboles des quatre points : le problème du point double est donc complétement résolu.

(*m*) Directions asymptotiques. — Pour que le point du lieu soit à l'infini sur la sécante, d'après la construction géométrique indiquée, il faut et il suffit que l'axe radical correspondant lui soit parallèle.

Il est évident, à l'inspection de la figure, que, *lorsqu'une sécante est parallèle à l'axe radical de deux cercles, les segments interceptés ont même point milieu. Réciproquement, si deux segments ont même point milieu, l'axe radical des deux cercles est parallèle à la direction de ces segments.*

Donc les directions asymptotiques sont déterminées par le point P et les points communs aux deux lieux suivants.

(*n*) Lieux des points milieux des segments interceptés sur une droite issue du point P et rencontrant les deux coniques proposées. — En ayant égard à la définition de ces deux lieux, on reconnaît immédiatement que chacun d'eux se compose d'une conique homothétique à la proposée, passant par son centre et le point P, ayant pour centre le milieu du segment compris entre le point P et le centre de la conique.

Les deux coniques se coupant en quatre points, dont trois sont généralement distincts du point P, *on obtient en général trois directions asymptotiques distinctes.* — Les deux coniques dont nous venons de parler ont pour équations

$$\text{(M)}\qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = 0,$$

$$\text{(N)}\qquad A'x^2 + 2B'xy + C'y^2 + D'x + E'y = 0;$$

les trois droites qui vont de l'origine aux points d'intersection sont représentées par l'équation

$$\begin{aligned}&(D'x + E'y)(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2)\\&\quad - (Dx + Ey)(A'x^2 + 2B'xy + C'y^2) = 0.\end{aligned}$$

(o) Supposons $D = D'$, $E = E'$, c'est-à-dire les polaires du point P parallèles : les deux coniques M et N sont tangentes à l'origine suivant la parallèle à la polaire, qui est une des directions asymptotiques de la courbe ; les deux autres directions asymptotiques sont les deux autres sécantes communes : on sait que, dans ce cas, on obtient facilement la sécante commune opposée à la tangente.

Si les deux coniques proposées sont homothétiques, les directions asymptotiques sont parallèles à la corde commune qui reste à distance finie, et à leurs asymptotes.

Si l'on suppose enfin le point P au centre de l'une des coniques passant par les quatre points donnés, « c'est-à-dire sur la conique des neuf points », $D = 0$, $E = 0$, les directions asymptotiques sont les asymptotes de la première conique, et la parallèle à la polaire du point P relative à la deuxième conique.

(p) Points simples remarquables a distance finie. —

La construction (*e*) montre que les quatre points communs aux deux coniques font partie du lieu.

(*q*) Recherche du troisième point du lieu sur les cordes communes. — Il suffit de mener par le point P une parallèle à l'un des systèmes de cordes; son point de rencontre avec la deuxième droite de ce système est le point demandé. C'est encore évident d'après la construction indiquée en (*e*).

(*r*) Parties parasites de la courbe. — Nous avons vu que les deux coniques, passant par les quatre points *donnés* et tangentes à une transversale *donnée*, peuvent être réelles ou imaginaires, le point milieu étant toujours réel. Il est donc intéressant de séparer sur le lieu les parties qui répondent à des coniques réelles ou imaginaires.

En vertu du principe de continuité, il est évident que les limites cherchées sont les points communs à la courbe et au lieu suivant :

Lieu des points de contact des tangentes issues du point P *aux coniques passant par les quatre points donnés.*

On voit *à priori* que ce lieu est du troisième ordre : donc les points cherchés sont au nombre de neuf. On peut prévoir qu'il y en a six à distance finie, à savoir : les quatre points donnés et le point double P; et trois à distance infinie, à savoir : les directions asymptotiques.

Nous nous bornerons à donner l'équation du lieu, sans entrer dans de plus longs détails :

$$\begin{aligned}(\mathrm{A}x^2 + 2\mathrm{B}xy + \mathrm{C}y^2 + 2\mathrm{D}x + 2\mathrm{E}y + \mathrm{F})(\mathrm{D}x' + \mathrm{E}y' + \mathrm{F}')\\ = (\mathrm{A}'x^2 + 2\mathrm{B}'xy + \mathrm{C}'y^2 + 2\mathrm{D}'x + 2\mathrm{E}'y + \mathrm{F}')(\mathrm{D}x + \mathrm{E}y + \mathrm{F}).\end{aligned}$$

(*s*) Cas où le lieu se décompose. — Une droite et une conique sont rencontrées, d'après le théorème de Bezout, l'une en trois points, l'autre en six points, par une courbe du troisième degré.

Donc un lieu du troisième ordre se décompose s'il a quatre points en ligne droite ou sept points sur une conique.

Ce qui précède donne l'intersection complète de la conique qui passe par les quatre points et le point P avec la courbe du troisième ordre, à savoir : les quatre points donnés et le point double. Ces quatre mêmes points et le point P représentent encore l'intersection complète de la courbe avec la conique des neuf points, lorsque le point P appartient à cette dernière conique.

On a déjà indiqué l'intersection complète de la courbe avec les cordes communes.

Il résulte de là et des considérations qui précèdent que le lieu se décompose :

1° Si le point P est sur l'une des sécantes communes aux deux coniques : la sécante fait partie du lieu;

2° Si les deux coniques sont homothétiques : on obtient trois droites, dont l'une toujours réelle (la corde commune avec deux coniques), les deux autres pouvant être réelles ou imaginaires et étant représentées par les directions asymptotiques communes aux deux coniques.

Deux cercles, par exemple, donnent l'axe radical et les deux droites $x^2+y^2=0$.

Deux hyperboles donnent les parallèles aux asymptotes et la corde commune passant par l'intersection des deux polaires du point P.

Deux paraboles donnent deux droites confondues, etc.

3° Si le point P est rejeté à l'infini dans une direction donnée.

Dans ce dernier cas, toutes les constructions indiquées se simplifient notablement. Aussi nous bornerons-nous à donner plus loin l'équation du lieu.

(t) Équation du lieu dans le cas général. — Dès maintenant, nous pouvons écrire, *à priori,* l'équation du lieu, en nous appuyant sur ce que l'ensemble des termes de degré moindre d'une courbe qui passe par l'origine représente, à un coefficient près, les tangentes en ce point, et sur ce que l'ensemble des termes du plus haut degré donne aussi les directions asymptotiques à un coefficient près.

Donc l'équation du lieu est, à un coefficient près μ,

$$\begin{aligned}\mu[(D'x + E'y)(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2)\\ - (Dx + Ey)(A'x^2 + 2B'xy + C'y^2)]\\ = F(A'x^2 + 2B'xy + C'y^2) - F'(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2).\end{aligned}$$

On achève de déterminer le coefficient μ en exprimant que le lieu passe par l'un quelconque des points trouvés, ou, ce qui est plus simple, en exprimant que l'équation satisfait à un cas particulier dont on connaît le résultat, par exemple pour deux cercles. On trouve ainsi que $\mu = 2$.

On peut, du reste, obtenir très-facilement directement l'équation du lieu; on n'a qu'à substituer dans la formule (θ)

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}:$$

on obtient

$$\begin{aligned}2[(D'x + E'y)(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2)\\ - (Dx + Ey)(A'x^2 + 2B'xy + C'y^2)]\\ = F(A'x^2 + 2B'xy + C'y^2) - F'(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2).\end{aligned}$$

(u) Équation du lieu dans le cas ou le point est rejeté a l'infini. — Soient la direction définie par les cosinus α, β, et (x_0, y_0) un point du lieu : l'équation de la transversale correspondante est

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \rho.$$

Les distances de ce point (x_0, y_0) aux deux coniques sont racines de deux équations de la forme

$$\rho^2 + p\rho + q = 0,$$

$$\rho^2 + p'\rho + q' = 0.$$

Si (x_0, y_0) est un point du lieu, on a

$$\mathrm{OA} \times \mathrm{OA'} = \mathrm{OB} \times \mathrm{OB'};$$

donc

$$q = q'.$$

Telle est la relation à laquelle doivent satisfaire les coordonnées x_0, y_0; donc c'est l'équation du lieu.

Si l'on développe les calculs, on trouve

$$\begin{aligned}(\mathrm{A}'\alpha^2 + 2\mathrm{B}'\alpha\beta + \mathrm{C}'\beta^2)&(\mathrm{A}x^2 + 2\mathrm{B}xy + \mathrm{C}y^2 + 2\mathrm{D}x + 2\mathrm{E}y + \mathrm{F})\\ &= (\mathrm{A}\alpha^2 + 2\mathrm{B}\alpha\beta + \mathrm{C}\beta^2)\\ &\quad \times (\mathrm{A}'x^2 + 2\mathrm{B}'xy + \mathrm{C}'y^2 + 2\mathrm{D}'x + 2\mathrm{F}'y + \mathrm{F}).\end{aligned}$$

(v) Un cas particulier. — Il nous resterait à *étudier* les propriétés et déformations successives que subit la courbe :

1° Lorsque le point P est successivement : point double réel, point de rebroussement, point isolé;

2° Lorsque le lieu se décompose.

Quoique ces deux questions offrent de l'intérêt, nous ne les traiterons pas, vu la longueur des considérations précédentes; il est cependant indispensable d'énumérer au moins les résultats que donne le cas particulier demandé au Concours d'admission.

Soient α, β les coordonnées du point P par rapport aux axes du rectangle, a et b les demi-longueurs des côtés.

Si l'on transporte l'origine au point P, les équations des deux coniques passant par les quatre points sont

$$x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 - a^2 = 0,$$
$$y^2 + 2\beta y + \beta^2 - b^2 = 0;$$

le point double est réel s'il est dans l'intérieur du rectangle ou dans les angles opposés à l'intérieur, et on trouve pour équation du lieu

$$2xy(\alpha y - \beta x) + (\alpha^2 - a^2)y^2 - (\beta^2 - b^2)x^2 = 0.$$