NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

HOÜEL

Sur la méthode d'analyse géométrique de M. Bellavitis (calcul des équipollences)

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 8 (1869), p. 289-312

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1869_2_8__289_0>

SUR LA MÉTHODE D'ANALYSE GÉOMÉTRIQUE DE M. BELLAVITIS (CALCUL DES ÉQUIPOLLENCES);

PAR M. HOÜEL,

Professeur de Mathématiques à la Faculté des Sciences de Bordeaux.

Depuis les immenses progrès qu'elle a fait faire à l'Analyse par les travaux de Cauchy et de Riemann, la théorie géométrique des quantités complexes a pris rang dans la science classique. Mais on ne s'est pas encore assez occupé des services que peut rendre cette théorie à la Géométrie pure et à la Mécanique, lorsqu'on y considère les grandeurs géométriques pour elles-mêmes, et non plus comme un système particulier de notations remplaçant les notations ordinaires de l'Algèbre.

Cependant tout lecteur attentif des pages qui vont suivre restera convaincu des avantages de cette méthode comme procédé d'Analyse géométrique, et ne pourra que s'étonner de l'indifférence avec laquelle a été accueillie jusqu'à ce jour la belle découverte de M. Giusto Bellavitis. Ce n'est pas que de nombreux travaux n'aient été faits dans la même direction. Mais aucun des auteurs qui ont traité ce sujet n'a présenté la méthode avec autant d'étendue que le savant professeur de Padoue, dont les travaux remontent à l'année 1832; aucun ne l'a exposée sous une forme aussi simple et aussi bien appropriée au sujet. Aussi sommes-nous heureux de l'occasion que nous offre la Rédaction des *Nouvelles Annales*, d'appeler l'attention des Géomètres français sur un instrument d'Analyse qui peut être d'une si grande utilité tant au point de vue de l'enseignement qu'à celui des progrès de la science.

Nous avons cherché à exposer le plus brièvement possible les principes contenus dans les ouvrages que l'Auteur a bien voulu mettre à notre disposition (*), et notre tâche a été grandement facilitée par les précieuses indications qu'il nous a lui-même fournies.

1. Carnot, dans sa *Géométrie de position*, parle des avantages que retirerait la Géométrie de l'introduction d'un algorithme représentant à la fois la grandeur et la position des diverses parties d'une figure, de telle sorte que, sans avoir besoin de recourir à des considérations géométriques spéciales, on pût obtenir les résultats cherchés par l'application d'un calcul fondé sur un petit nombre de lois générales.

Le désir de Carnot est complétement réalisé depuis trente-cinq ans par le *Calcul des équipollences* dû au génie inventif de M. Bellavitis. Bien que cette méthode féconde ne soit pas encore connue dans notre pays, cependant les principes sur lesquels elle repose ont été établis pour la première fois en France, il y a plus de soixante ans, par Argand, et développés ensuite à diverses reprises par les travaux de Français, de Mourey, de Saint-Venant, de Cauchy. Nous pourrions encore citer, parmi les ouvrages relatifs au même sujet, le *Calcul de*

(*) *Saggio di applicazioni di un nuovo metodo di Geometria analitica* (*Calcolo delle Equipollenze*); Padova, 1835.

Saggio sull' Algebra degli immaginarii; Venezia, 1852.

Sposizione del metodo delle Equipollense; Modena, 1854.

Calcolo dei Quaternioni di W. R. Hamilton, e sua relazione col metodo delle Equipollenze; Modena, 1858.

Sposizione dei nuovi metodi di Geometria analitica; Venezia, 1860.

Determinazione numerica delle Radici immaginarie delle equazioni algebriche; Venezia, 1864.

Elementi di Geometria, di Trigonometria e di Geometria analitica, ec.; Padova, 1862.

situation de Scheffler (*), le Mémoire de Siebeck sur la *Représentation graphique des fonctions imaginaires* (**), le *Calcul géométrique* de Dillner (***), etc. La théorie des quaternions d'Hamilton (****) repose sur des bases analogues, et peut, jusqu'à un certain point, être regardée comme une extension à l'espace du Calcul des équipollences. Les règles de ce dernier Calcul sont précisément les mêmes que celles du Calcul algébrique, tandis que les quaternions exigent un algorithme spécial.

2. La méthode des équipollences se distingue principalement par les avantages suivants :

1° L'abondance des théorèmes, qui découlent d'un principe unique, toute propriété de points placés en ligne droite donnant immédiatement une propriété des points d'un plan, dès que l'on change les équations relatives aux premiers points en équipollences relatives aux seconds;

2° La facilité avec laquelle on parvient à la solution graphique des problèmes : pour les questions mêmes qui passent pour difficiles, la méthode fournit directement des solutions plus courtes que celles que l'on avait découvertes par des combinaisons artificielles de théorèmes géométriques ;

3° La théorie des courbes, débarrassée de tout système spécial de coordonnées, conduit à des formules plus simples et en même temps plus générales, qui expriment

---

(*) *Der Situationskalkul;* Braunschweig, 1851.

(**) *Journal f. d. r. u. ang. Mathematik*, Bd. LV, 1858.

(***) *Geometrisk Kalkyl;* Upsala, 1860. — L'auteur en fait paraître en ce moment une nouvelle rédaction dans l'excellent journal qu'il dirige (*Tidskrift för Matematik och Fysik;* Upsala).

(****) *Lectures on Quaternions;* Dublin, 1853. — *Elements of Quaternions;* London, 1866.

les affections des courbes, sans qu'il soit besoin de les rapporter à aucun système arbitraire;

4° Elle fournit le type réel des quantités imaginaires, par lequel sont pleinement justifiés les calculs de l'Algèbre, de la manière que Cauchy regardait comme la seule satisfaisante.

3. Pour faire connaître la méthode, il nous faut donner quelques définitions et quelques règles de calcul. Nous croyons inutile de nous arrêter à démontrer la légitimité des premières et la justesse des secondes, parce que, le lecteur une fois convaincu de l'utilité de la méthode, il lui sera facile de retrouver par lui-même la démonstration des principes.

4. Définition. — Une droite désignée, comme d'habitude, par deux lettres, est considérée comme prise *à partir du point indiqué par la première lettre jusqu'au point indiqué par la seconde,* et l'on tient compte, non-seulement de sa grandeur, mais aussi de sa direction (*).

D'après cela, KI et IK ne sont pas deux droites *équipollentes*, quoique l'une soit équipollente à l'autre prise avec le signe —, c'est-à-dire que l'on ait $KI \mathrel{=\!\!=} -IK$.

Deux droites AB, DC sont dites *équipollentes* (et peuvent se remplacer mutuellement) dans le cas seulement où elles sont à la fois *égales*, *parallèles et dirigées dans le même sens*, de sorte que ABCD soit un parallélogramme. C'est ce que l'on exprime en écrivant

$$AB \mathrel{=\!\!=} DC, \quad \text{ou} \quad AB \mathrel{=\!\!=} -CD, \quad \text{ou encore} \quad AB + CD \mathrel{=\!\!=} 0.$$

(*) Pour exprimer qu'une droite est considérée à ce double point de vue, on surmonte quelquefois les deux lettres qui la représentent d'un trait horizontal; cependant, pour simplifier l'écriture, nous supprimerons ce trait, et il n'en pourra résulter aucune équivoque, en ayant soin d'employer la notation *gr* AB pour désigner la longueur de la ligne AB.

Une droite affectée d'un coefficient numérique conserve sa direction et change de longueur proportionnellement à ce coefficient. Ainsi l'équipollence

$$\text{AB} = 2\text{DM}$$

signifie que AB est parallèle à DM et dirigé dans le même sens, et que la longueur de AB est double de celle de DM. Pareillement, la formule

$$\text{AP} = \frac{1}{3}\,\text{AB}$$

veut dire que le point P est situé au tiers de AB (puisque, sans cela, AP ne pourrait pas être parallèle à AB).

5. Définition. — La *somme géométrique* de deux ou de plusieurs droites KI, DM,... s'obtient en menant, par un point quelconque O, une droite OP équipollente à KI; puis, par la seconde extrémité P, une droite PQ équipollente à DM, etc.; la droite OQ sera la somme géométrique des droites KI, DM,....

De quelque autre point que l'on fût parti, et dans quelque autre ordre que l'on eût additionné les droites, on serait toujours arrivé à une somme géométrique équipollente à OQ.

La même chose a lieu, quel que soit le nombre des droites que l'on ajoute entre elles.

6. Règle I. — Pour trois points quelconques A, B, C, on a l'équipollence

$$\text{AB} + \text{BC} = \text{AC}.$$

C'est là une conséquence de la définition que l'on vient de donner de la somme géométrique.

Pour que l'on ne confonde pas une somme de cette nature avec une somme ordinaire, M. Bellavitis emploie, au lieu du symbole $=$, un symbole particulier, celui par lequel les astronomes désignent le signe de la Balance, voulant peut-être faire allusion à l'analogie de la sommation géométrique avec la composition des forces en Mécanique. Dans le désir d'éviter autant que possible l'introduction de notations nouvelles, nous avons conservé le signe d'égalité ordinaire, pensant que la confusion sera aussi sûrement évitée au moyen de la convention que nous ferons d'affecter une ligne de la caractéristique *gr* (abrégé de *grandeur*) toutes les fois que cette ligne devra être considérée en *grandeur* seulement, abstraction faite de sa direction.

D'après la Règle que nous venons d'énoncer, on peut encore écrire

$$\mathrm{BC} = \mathrm{AC} - \mathrm{AB}.$$

Une droite BC peut ainsi être rapportée à un point quelconque A. On a encore

$$\mathrm{BC} = \mathrm{AC} + \mathrm{BA}, \quad \mathrm{AB} + \mathrm{BC} + \mathrm{CA} = 0.$$

7. Règle II. — Toutes les fois qu'au moyen d'un calcul on arrive à une équipollence binôme

$$x.\mathrm{AB} = y.\mathrm{CD},$$

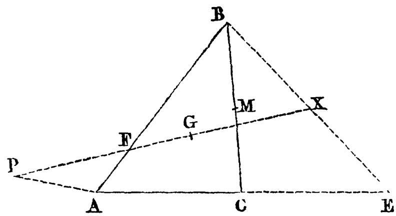
si l'on sait, de plus, que les droites AB, CD ne sont pas parallèles, on en conclura que les coefficients x et y sont nuls séparément.

En effet, si x et y n'étaient pas nuls, cette équipollence indiquerait que les droites AB, CD seraient parallèles, et que leur rapport est égal à celui de y à x. Ainsi une équipollence sert à déterminer deux quantités inconnues.

Montrons l'usage de ces Règles par des exemples faciles.

8. *Exemple I.* — On veut construire un triangle ABC (*fig.* 1), connaissant le centre de gravité G, le point F

Fig. 1.



situé au quart du côté AB, et l'extrémité E du côté AC, prolongé d'une quantité CE = AC.

Les conditions du problème sont exprimées par les équipollences

$$\mathrm{AE} = 2\mathrm{AC}, \quad \mathrm{AF} = \frac{1}{4}\mathrm{AB}, \quad \mathrm{AG} = \frac{1}{3}(\mathrm{AB} + \mathrm{AC}),$$

puisque, M étant le milieu du côté BC, on a

$$\mathrm{AG} = \frac{2}{3}\mathrm{AM},$$

et

$$\mathrm{AM} = \mathrm{AB} + \mathrm{BM} = \mathrm{AB} + \frac{1}{2}\mathrm{BC} = \mathrm{AB} + \frac{1}{2}\mathrm{AC} - \frac{1}{2}\mathrm{AB}$$
$$= \frac{1}{2}(\mathrm{AB} + \mathrm{AC}).$$

Les points inconnus sont les sommets A, B, C. En éliminant deux de ces points par la substitution dans la troisième équipollence des valeurs tirées des deux premières, il vient

$$3\mathrm{AG} = 4\mathrm{AF} + \frac{1}{2}\mathrm{AE}.$$

Il faut pour cela que le point inconnu A entre dans la seule droite AG. Or on aura, par la Règle I,

$$AF = AG + GF, \quad AE = AG + GE,$$

par conséquent

$$3AG = 4AG + 4GF + \frac{1}{2}AG + \frac{1}{2}GE;$$

d'où l'on tire

$$-\frac{3}{2}AG = 4GF + \frac{1}{2}GE,$$

ou

$$GA = \frac{8}{3}GF + \frac{1}{3}GE.$$

Cette équipollence nous apprend qu'il faut prolonger GF, de manière qu'on ait $GP = \frac{8}{3}GF$, puis mener $PA = \frac{1}{3}GE$ (c'est-à-dire PA parallèle à GE et égal au tiers de GE), et A sera le sommet du triangle demandé.

Cherchons, dans la figure précédente, dans quels rapports se coupent les deux droites BE, FG au point X. Posons $BX = x.BE$ (ce qui exprime que le point X tombe sur la ligne BE, le rapport $BX : BE = x$ restant encore inconnu), et soit de même $FX = y.FG$. Par la Règle I, on a

$$AX = AB + BX = AB + x.BE,$$

et pareillement

$$AX = AF + y.FG.$$

Après avoir éliminé AX, ce qui donne

$$AB + x.BE = AF + y.FG,$$

nous pourrons, au moyen des équipollences données

$$AE = 2.AC, \quad AF = \frac{1}{4}AB, \quad AG = \frac{1}{3}(AB + AC),$$

obtenir une équipollence entre les seules droites AB, AC,

$$AB + 2x.AC - x.AB = \frac{1}{4}AB + \frac{y}{3}(AB + AC) - \frac{y}{4}AB;$$

et comme les droites AB, AC ne sont pas parallèles, il s'ensuit, d'après la Règle II, qu'on devra avoir séparément

$$1 - x - \frac{1}{4} - \frac{y}{3} + \frac{y}{4} = 0, \quad 2x - \frac{y}{3} = 0,$$

ce qui donne

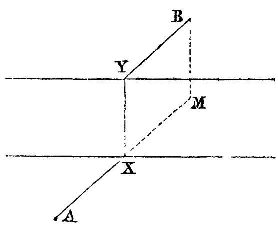
$$x = \frac{1}{2}, \quad y = 6x = 3.$$

Par conséquent la droite FG coupe la droite BE en son milieu X, et l'on a

$$FX = 3FG.$$

9. *Exemple II.* — Soient A et B (*fig.* 2) deux points séparés par une rivière, que l'on doit traverser sur un

Fig. 2.



pont perpendiculaire aux deux rives. Déterminer la position XY de ce pont, de manière que la somme arithmétique des longueurs AX + XY + YB soit le plus petite possible.

L'équipollence (Règle II)

$$AX + XY + YB \simeq AB$$

peut s'écrire sous la forme

$$AX + YB = AB - XY,$$

et comme la largeur XY de la rivière est connue en grandeur et en direction, nous pourrons construire la somme géométrique

$$AB - XY = AB + YX,$$

laquelle sera AM, en menant $BM = YX$. Puis, dans l'équipollence

$$AX + YB = AM,$$

on voit que la somme arithmétique des longueurs $AX + YB$ sera minimum, quand AX tombera sur AM, et que par conséquent YB sera parallèle à cette droite AM.

10. Le Calcul des équipollences comprend le Calcul barycentrique, dont Moebius avait déjà montré les nombreuses applications. Ainsi le centre de gravité G des trois points A, B, C est exprimé par la relation

$$AG + BG + CG = 0,$$

d'où l'on peut déduire, au moyen de la Règle I du Calcul des équipollences, la relation

$$AG + AG - AB + AG - AC = 0, \quad \text{ou} \quad 3AG = AB + AC,$$

dont nous nous sommes servis plus haut.

Mais la partie de la méthode qui se rapporte aux produits de droites, et qui s'applique exclusivement aux figures tracées dans un même plan, appartient entièrement à M. Bellavitis.

11. Pour définir plus facilement ce qu'il faut entendre, dans la méthode des équipollences, par un monôme formé par la multiplication ou la division de plusieurs droites,

il est bon de commencer par définir *l'inclinaison* d'une droite.

De même que la *grandeur* d'une droite s'exprime par un nombre rapporté à une unité linéaire que l'on choisit arbitrairement, mais à laquelle on doit ensuite conserver constamment la même longueur; de même, par *inclinaison* d'une droite on entend l'angle que fait cette droite avec une autre droite choisie arbitrairement pour origine des inclinaisons. De là résulte qu'un angle BAC est exprimé par

$$\text{incl AC} - \text{incl AB},$$

en désignant par incl AB l'inclinaison de la droite AB. Les angles sont considérés comme comptés depuis la première lettre vers la dernière, et il faut avoir égard à leur signe. Ainsi l'angle CAB est de signe contraire à l'angle BAC, et est égal à

$$\text{incl AB} - \text{incl AC}.$$

12. Cela posé, un monôme tel que

$$\frac{\text{AB}.\text{CD}}{\text{EF}},$$

par exemple, sera équipollent à une droite GH, dont la grandeur aura pour valeur

$$\frac{\text{gr AB} \times \text{gr CD}}{\text{gr EF}},$$

et dont l'inclinaison sera

$$\text{incl GH} = \text{incl AB} + \text{incl CD} - \text{incl EF}.$$

On retiendra plus aisément cette dernière équation, en la rapprochant de la formule qui donne les logarithmes d'un produit et d'un quotient.

Quand on sait interpréter un monôme, alors, en ayant de plus égard à la définition donnée plus haut de la somme géométrique, on comprend la signification d'une équipollence quelconque entre des polynômes.

Pour mieux expliquer la signification d'un monôme, observons que ce monôme peut se ramener à une suite de proportions. Si l'on fait en sorte que la seconde droite ait une extrémité commune avec la première, en supposant que la quatrième doive avoir aussi une extrémité commune avec la troisième, une proportion peut s'écrire ainsi

$$\mathrm{AB} : \mathrm{AC} \doteq \mathrm{OD} : \mathrm{OX},$$

et cette équipollence comprendra les deux équations

$$\mathrm{gr\,AB} : \mathrm{gr\,AC} = \mathrm{gr\,OD} : \mathrm{gr\,OX},$$
$$\mathrm{incl\,AB} - \mathrm{incl\,AC} = \mathrm{incl\,OD} - \mathrm{incl\,OX}.$$

Pour construire OX, prenons sur AB la longueur AD′ égale en grandeur à OD; formons le triangle AD′X′ homothétique à ABC, de sorte que le point X′ tombe sur AC. Alors le triangle ODX sera *directement* égal au triangle AD′X′, en entendant, par *directement* égal, que l'on pourra faire coïncider AD′X′ avec ODX, en le transportant dans son plan, sans retournement.

13. En réfléchissant attentivement sur les définitions que nous avons admises, on reconnaît qu'elles n'impliquent aucune contradiction, et que les équipollences peuvent se traiter absolument comme les équations, et conduiront toujours à des résultats exacts quand on les interprétera conformément aux principes de la méthode. Il s'ensuit de là que toute équation relative aux points d'une droite peut se changer en une équipollence relative

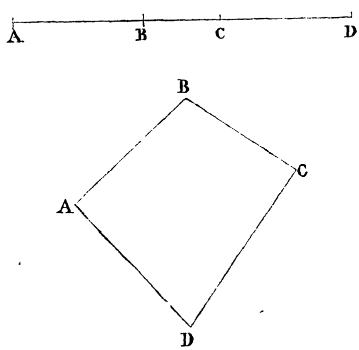
aux points d'un plan, en ayant soin de tenir compte du signe de chaque droite. En voici un exemple :

Entre quatre points A, B, C, D en ligne droite (*fig.* 3), on a la relation

$$AB.CD + AD.BC + AC.DB = 0$$

(remarquons que, si BC, CD sont positifs, DB sera négatif); ce qui se démontre en observant que $CD = AD - AC$, $BC = AC - AB$, $DB = AB - AD$, et qu'en substituant

Fig. 3.



ces valeurs, la relation devient identique. On démontrera de la même manière que, pour quatre points A, B, C, D d'un plan, on a l'équipollence

$$(1) \qquad AB.CD + AD.BC + AC.DB = 0.$$

Pour la construire, on peut imaginer qu'elle soit divisée par une droite OH, prise pour origine des inclinaisons et pour unité de longueur (cette ligne OH pouvant être une quelconque des lignes AB, CD,...). Les trois termes de l'équipollence pourront de cette manière exprimer les côtés LM, MN, NL d'un triangle, puisque l'on a, par la Règle I,

$$LM + MN + NL = 0.$$

Pour interpréter cette équipollence (1), ainsi que toute autre équipollence trinôme, nous poserons la Règle suivante :

14. Règle III. — Si, dans une équipollence trinôme, deux termes ont une égale inclinaison, la grandeur de l'autre terme sera égale à la somme des grandeurs des deux premiers.

En effet, si incl LM = incl MN (*fig.* 4), les trois points

Fig. 4.

L, M, N seront en ligne droite (au lieu de former un triangle), et, par suite,

$$\operatorname{gr} NL = \operatorname{gr} LM + \operatorname{gr} MN.$$

Si, au contraire, les inclinaisons de deux termes de l'équipollence diffèrent de 90 degrés, le triangle LMN, dont les côtés sont respectivement équipollents aux termes de l'équipollence, sera rectangle, et les grandeurs de ses côtés satisferont au théorème connu; c'est-à-dire que, si incl LM — incl MN = $\pm 90°$, on aura

$$(NL)^2 = (LM)^2 + (MN)^2.$$

Si les inclinaisons des trois termes forment une progression arithmétique, c'est-à-dire si l'on a

$$\operatorname{incl} LM - \operatorname{incl} MN = \operatorname{incl} MN - \operatorname{incl} NL,$$

le triangle LMN sera isoscèle, et, par conséquent, on aura

$$\mathrm{gr\,LM} = \mathrm{gr\,NL}.$$

Si enfin on a

$$\mathrm{incl\,LM} - \mathrm{incl\,MN} = 120^\circ, \quad \mathrm{incl\,MN} - \mathrm{incl\,NL} = 120^\circ,$$

ces différences étant égales aux angles extérieurs en M et en N du triangle LMN, ce triangle sera équilatéral, et, par suite, on aura

$$\mathrm{gr\,LM} = \mathrm{gr\,MN} = \mathrm{gr\,NL}.$$

15. Appliquons cette Règle à l'équipollence précédente (1). Si les deux premiers termes ont des inclinaisons égales, c'est-à-dire si l'on a

$$\mathrm{incl\,AB} + \mathrm{incl\,CD} = \mathrm{incl\,AD} + \mathrm{incl\,BC},$$

en remarquant que

$$\mathrm{incl\,AD} - \mathrm{incl\,AB} = \mathrm{angle\,BAD},$$
$$\mathrm{incl\,CB} - \mathrm{incl\,CD} = \mathrm{angle\,DCB},$$

il viendra

$$\mathrm{angle\,BAD} + \mathrm{angle\,DCB} = \mathrm{incl\,CB} - \mathrm{incl\,BC} = 180^\circ.$$

Donc, si la somme de deux angles opposés d'un quadrilatère est égale à 180°, on aura, par la Règle en question,

$$\mathrm{gr(AB.CD)} + \mathrm{gr(AD.BC)} = \mathrm{gr(AC.DB)},$$

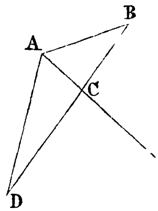
ce qui donne le théorème connu de Ptolémée.

Si, au lieu de cela, dans le quadrilatère ABCD, les deux angles opposés BAD, DCB ont pour somme 90° ou 270°, on aura, par la seconde partie de la Règle,

$$\mathrm{gr(AB.CD)}^2 + \mathrm{gr(AD.BC)}^2 = \mathrm{gr(AC.DB)}^2.$$

Si les trois points B, C, D (*fig.* 5) sont en ligne droite,

Fig. 5.



et que, de plus, on ait angle BAC = angle CAD = 60°, il viendra alors

$$\begin{aligned}&\text{incl}(AB.CD) - \text{incl}(AD.BC)\\ &\quad = \text{incl}\,AB + \text{incl}\,CD - \text{incl}\,AD - \text{incl}\,BC\\ &\quad = \text{incl}\,AB - \text{incl}\,AD = -120°.\end{aligned}$$

En outre,

$$\begin{aligned}&\text{incl}(AD.BC) - \text{incl}(AC.DB)\\ &\quad = \text{incl}\,AD - \text{incl}\,AC + \text{incl}\,BC - \text{incl}\,DB\\ &\quad = 60° - 180° = -120°;\end{aligned}$$

donc, en vertu de la dernière partie de la Règle III, nous aurons

$$\text{gr}(AB.CD) = \text{gr}(AD.BC) = \text{gr}(AC.DB);$$

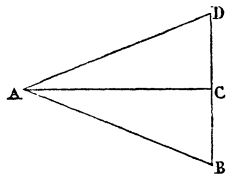
d'où il résulte ensuite que (BC, $\frac{1}{2}$ BD, CD étant trois droites en progression arithmétique) AD, 2AC, AB seront en progression harmonique.

16. La méthode peut encore servir à démontrer les théorèmes de la Géométrie élémentaire. Ainsi, par

exemple, si à la droite AC (*fig.* 6) on mène les deux perpendiculaires égales et opposées CB, CD, on a

$$AB = AC + CB, \quad AD = AC + CD;$$

Fig. 6.



d'où, à cause de $CD = -CB$,

$$AB.AD = AC.AC + CB.CD.$$

Les deux termes du second membre ont des inclinaisons égales, puisque

$$90^\circ = \operatorname{incl} CB - \operatorname{incl} AC = \operatorname{incl} AC - \operatorname{incl} CD;$$

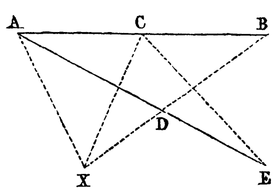
par conséquent

$$\operatorname{gr}(AB.AD) = \operatorname{gr}(AB)^2 = \operatorname{gr}(AC)^2 + \operatorname{gr}(CB)^2.$$

17. Donnons encore un exemple de problème.

Construire, sur une base donnée AB (*fig.* 7), un

Fig. 7.



triangle ABX, connaissant le produit de ses côtés AX, BX, et la différence BAD des angles à la base, ce qui revient à dire que l'on doit avoir

$$\text{angle DAX} = \text{angle XBA},$$

ou

$$\text{incl AX} - \text{incl AD} = \text{incl BA} - \text{incl BX}.$$

On pourra donner à AD une longueur telle, que les deux conditions du problème soient exprimées par l'équipollence

$$\text{AX}.\text{BX} = \text{AD}.\text{BA}.$$

En écrivant AX — AB au lieu de BX, la droite AX sera donnée par une équipollence du second degré, qui, résolue à la manière ordinaire, donne

$$\text{AX} - \frac{1}{2}\,\text{AB} = \sqrt{\frac{1}{4}(\text{AB})^2 + \text{AD}.\text{BA}}.$$

En prenant $\text{AC} = \frac{1}{2}\text{AB}$, $\text{AE} = 2\,\text{AD}$, il vient

$$\text{AX} - \text{AC} = \sqrt{\text{AC}(\text{AC} - \text{AE})},$$

ou

$$\text{CX} = \sqrt{\text{AC}.\text{EC}} = \sqrt{\text{CA}.\text{CE}},$$

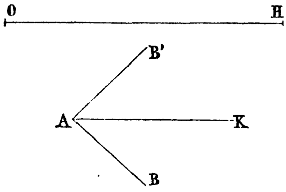
ce qui nous montre comment on doit construire la ligne CX, qui est bissectrice de l'angle ACE, et moyenne proportionnelle entre CA et CE.

18. Les conventions adoptées jusqu'ici ne sont pas suffisantes pour exprimer que les angles sont égaux et de signe contraire, que les triangles sont égaux et inversement placées (ou *symétriques*, comme on les appelle, c'est-à-dire qu'ils ne peuvent coïncider qu'après le retournement du plan de l'un d'eux), etc.

M. Bellavitis appelle *conjuguée* d'une droite ou d'une figure, la droite ou la figure que l'on obtient en faisant faire à la première une demi-révolution autour d'une droite parallèle à celle que l'on a prise pour origine des inclinaisons.

Ainsi, si OH (*fig.* 8) est l'origine des inclinaisons, en menant AK parallèle à OH, et construisant le triangle

Fig. 8.



AKB′ *inversement égal* au triangle AKB, la droite AB′, ainsi que toute autre qui lui sera équipollente, sera dite *conjuguée* de AB, ce que l'on écrira ainsi :

$$\mathrm{AB}' = \mathrm{conj\,AB}.$$

Il est évident que l'on a

$$\mathrm{gr(conj\,AB)} = \mathrm{gr\,AB},$$
$$\mathrm{incl(conj\,AB)} = -\,\mathrm{incl\,AB}.$$

Il est est facile, en outre, de s'assurer que l'on a cette Règle :

19. Règle IV. — En même temps qu'une équipollence donnée, a toujours lieu aussi sa conjuguée, laquelle s'obtient en remplaçant chaque droite par sa conjuguée.

Le produit de deux droites conjuguées entre elles est égal au carré de leur grandeur commune, et a une inclinaison nulle, c'est-à-dire que

$$\mathrm{AB}.\mathrm{conj\,AB} = \mathrm{gr(AB)}^2.$$

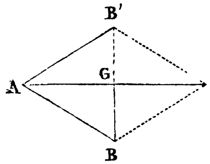
Une droite, divisée par sa conjuguée, donne pour quotient l'unité, avec une inclinaison double de celle de la droite, c'est-à-dire que

$$\mathrm{gr}\left(\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{conj\,AB}}\right) = 1, \quad \mathrm{incl}\left(\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{conj\,AB}}\right) = 2\,\mathrm{incl\,AB}.$$

20.

La somme géométrique d'une droite et de sa conjuguée a une inclinaison nulle, et est égale au double de la pro-

Fig. 9.



jection de la droite sur l'axe d'inclinaison nulle, c'est-à-dire que l'on a (*fig.* 9)

$$AB + \operatorname{conj} AB = 2\,AG.$$

On voit encore que

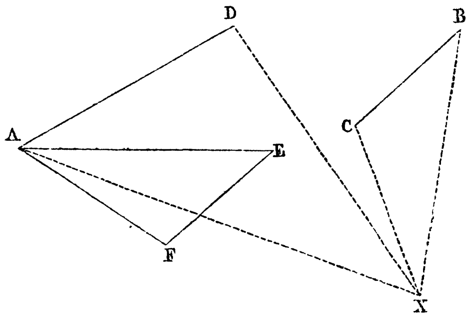
$$AB - \operatorname{conj} AB = B'B = 2\,GB,$$

dont l'inclinaison est de 90 degrés.

20. Le problème suivant va montrer l'usage de cette Règle.

Trouver le sommet commun X de deux triangles inversement semblables (*fig.* 10), dont on donne les bases AD, BC.

Fig. 10.



La similitude est exprimée par les deux équations

$$\text{gr}\,AX : \text{gr}\,AD = \text{gr}\,BX : \text{gr}\,BC,$$
$$\text{angle}\,DAX = -\,\text{angle}\,CBX.$$

Cette dernière peut s'écrire

$$\begin{aligned}\text{incl}\,AX - \text{incl}\,AD &= -(\text{incl}\,BX - \text{incl}\,BC)\\ &= \text{incl}\,(\text{conj}\,BX) - \text{incl}\,(\text{conj}\,BC),\end{aligned}$$

et l'on voit par là que les conditions du problème sont données par l'équipollence

$$AX : AD = \text{conj}\,BX : \text{conj}\,BC.$$

En y faisant $\text{conj}\,BX = \text{conj}\,AX - \text{conj}\,AB$, on a, en développant,

$$\text{conj}\,BC.AX = AD.\text{conj}\,AX - AD.\text{conj}\,AB,$$

et, en même temps que cette équipollence, a lieu sa conjuguée,

$$BC.\text{conj}\,AX = \text{conj}\,AD.AX - \text{conj}\,AD.AB.$$

Entre ces équipollences, nous pourrons éliminer $\text{conj}\,AX$, et nous aurons, pour déterminer AX, l'équipollence

$$\begin{aligned}&(AD.\text{conj}\,AD - BC.\text{conj}\,BC)\,AX\\ &\quad = AD(AB.\text{conj}\,AD + BC.\text{conj}\,AB).\end{aligned}$$

En prenant pour origine des inclinaisous la droite AB, il vient $\text{incl}\,AB = 0$, $AB = \text{conj}\,AB$, et si l'on détermine la droite $AE = \text{conj}\,AD$ (c'est-à-dire, si l'on construit le triangle ABE inversement égal à ABD), et que l'on mène $EF = BC$, on aura

$$\begin{aligned}&(AD.\text{conj}\,AD - BC.\text{conj}\,BC)\,AX\\ &\quad = AB.AD(\text{conj}\,AD + BC)\\ &\quad = AB.AD(AE + BC) = AB.AD.AF.\end{aligned}$$

Pour construire, d'après cela, la ligne AX, il suffira de déterminer son inclinaison. Or, comme chacun des produits AD.conj AD, BC.conj BC a une inclinaison nulle, on aura alors

$$\begin{aligned}\text{incl}\,\mathrm{AX} &= \text{incl}\,(\mathrm{AB.AD.AF}) = \text{incl}\,\mathrm{AD} + \text{incl}\,\mathrm{AF} \\ &= -\,\text{incl}\,\mathrm{AE} + \text{incl}\,\mathrm{AF} = \text{angle}\,\mathrm{EAF}.\end{aligned}$$

On aura donc

$$\text{angle}\,\mathrm{BAX} = \text{angle}\,\mathrm{EAF}.$$

21. OH, OI étant deux droites égales et perpendiculaires entre elles, si l'on multiplie une droite par le rapport $\frac{\mathrm{OI}}{\mathrm{OH}}$, on ne fera qu'augmenter l'inclinaison de 90 degrés, et, si l'on réitère cette multiplication, on aura

$$\left(\frac{\mathrm{OI}}{\mathrm{OH}}\right)^2 \mathrm{AB} = -\,\mathrm{AB}.$$

Donc le rapport $\frac{\mathrm{OI}}{\mathrm{OH}}$ se calcule précisément comme le $\sqrt{-1}$ de l'Algèbre. M. Bellavitis indique, pour abréger, ce rapport par un signe particulier, que nous remplacerons ici par la lettre i, généralement employée en Analyse pour désigner le symbole $\sqrt{-1}$.

Il est conforme aux principes du calcul que $i^u.\mathrm{AB}$ exprime une droite égale à AB en grandeur, et dont l'inclinaison surpasse celle de AB de $u.90^\circ$, u pouvant être fractionnaire.

Lorsqu'on prend la conjuguée d'une équipollence, chaque i se change en $-\,i$, et chaque i^u en $(-\,i)^u$ ou i^{-u}.

Le symbole 1_t, employé par Cauchy, d'après Français et Mourey, est identique avec $i^{\frac{2}{\pi}t}$.

22. Pour exprimer l'aire d'un triangle ABC (*), on

(*) A partir d'ici, le lecteur est prié de faire la figure.

rencontre l'expression de AC′, qui est la droite AC rabattue autour de AB. On a

$$\begin{aligned}\mathrm{gr\,AC'} &= \mathrm{gr\,AC},\\ \mathrm{incl\,AC'} - \mathrm{incl\,AB} &= \mathrm{incl\,AB} - \mathrm{incl\,AC}\\ &= \mathrm{incl\,(conj\,AC)} - \mathrm{incl(conj\,AB)}.\end{aligned}$$

Ces deux équations sont comprises dans l'équipollence

$$\mathrm{AC'} = \frac{\mathrm{AB.conj\,AC}}{\mathrm{conj\,AB}}.$$

On en tire, P étant le milieu de CC′,

$$\begin{aligned}\mathrm{conj\,AB.PC} &= \frac{1}{2}\,\mathrm{conj\,AC.CC'}\\ &= \frac{1}{2}\,(\mathrm{AC.conj\,AB} - \mathrm{AB.conj\,AC}).\end{aligned}$$

Le premier membre a pour grandeur 2ABC, et pour inclinaison $-\mathrm{incl\,AB} + \mathrm{incl\,PC} = 90^\circ$. En divisant donc les deux membres par $2i$, il en résulte

$$\mathrm{ABC} = \frac{i}{4}\,(\mathrm{AB.conj\,AC} - \mathrm{AC.conj\,AB}),$$

expression qui, d'après la Règle I, peut s'écrire

$$\mathrm{ABC} = \frac{i}{4}\,(\mathrm{AB.conj BC} - \mathrm{conj\,AB.BC}).$$

23. Faisons quelques applications de cette formule.

En parcourant le périmètre d'un polygone ABCDE, on a mesuré ses côtés et leurs inclinaisons sur le méridien magnétique. Pour calculer l'aire ABCDE, on observe qu'elle est la somme des triangles ABC, ACD, ADE, et que, par suite, elle a pour expression

$$\frac{i}{4}\,(\mathrm{AB.conj BC} + \mathrm{AC.conj CD} + \mathrm{AD.conj DE} - \text{les termes conj.}).$$

D'après la Règle I, aux diagonales AC, AD on peut substituer les sommes géométriques AB + BC, AB + BC + CD, d'où il résulte que la formule nous apprend que l'aire du pentagone est la somme de six triangles, dont chacun a deux côtés équipollents à deux des côtés AB, BC, CD, DE (en omettant EA).

Si des sommets du polygone ABC on mène les droites équipollentes entre elles $AA' = BB' = CC'$, la somme algébrique des aires des triangles ABA', BCB', CAC' est toujours nulle, car elle est exprimée par

$$\frac{i}{4}(AB.\mathrm{conj}\,AA' + BC\,\mathrm{conj}\,BB' + CA.\mathrm{conj}\,CC' - \text{les termes conj.}),$$

et l'on a

$$AB + BC + CA = 0.$$

(*La suite prochainement.*)