Nouvelles annales de mathématiques

Sartiaux

Note sur les surfaces du troisième ordre

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 8 (1869), p. 27-32

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1869_2_8__27_1>

NOTE SUR LES SURFACES DU TROISIÈME ORDRE;

PAR M. SARTIAUX,
Élève ingénieur des Ponts et Chaussées.

Si parmi les dix-huit points d'intersection d'une surface du troisième ordre avec les six arêtes d'un tétraèdre, six de ces points, pris chacun sur une arête, sont dans un même plan, les douze autres sont sur une même surface du second ordre.

Je prends en effet pour tétraèdre de référence le tétraèdre donné. Je puis, sans rien changer à la généralité de la question, disposer des quatre paramètres de référence de telle sorte que, si $P = \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta t = 0$ est le plan qui contient les six points, l'équation de la surface soit

$$\begin{aligned}\alpha^3 x^3 + \beta^3 y^3 + \gamma^3 z^3 + \delta^3 t^3 + a x^2 y + a' x y^2 + b x^2 z + b' x z^2 \\ + c x^2 t + c' x t^2 + d y^2 z + d' y z^2 + e z^2 t + e' z t^2 + f y z t \\ + g x z t + h x y t + k x y z = 0.\end{aligned}$$

Cherchons l'intersection avec l'arête $z = 0$, $t = 0$, par exemple, on a

$$\alpha^3 x^3 + \beta^3 y^3 + a x^2 y + a' x y^2 = 0. \tag{1}$$

L'un des points d'intersection étant sur le plan P, le premier membre de cette équation est divisible par $\alpha x + \beta y$; par suite, en posant $a = \lambda\alpha$, $a' = \lambda\beta$, elle s'écrira :

$$\begin{aligned}\alpha^3 x^3 + \beta^3 y^3 + \lambda(\alpha x + \beta y) x y \\ = (\alpha x + \beta y)[\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + x y(\lambda - \alpha\beta)] = 0.\end{aligned}$$

On peut faire des calculs analogues pour les autres arêtes, et il est évident que les douze points d'intersection non situés dans le plan P seront sur la surface du second ordre :

$$\alpha^2x^2 + \beta^2y^2 + \gamma^2r^2 + \delta^2t^2 + xy(\lambda - \alpha\beta)$$
$$+ xr(\lambda_1 - \alpha\gamma) + xt(\lambda_2 - \alpha\delta) + yr(\lambda_3 - \beta\gamma)$$
$$+ yt(\lambda_4 - \beta\delta) + zt(\lambda_2 - \gamma\delta) = 0,$$

ce qui démontre le théorème énoncé.

Supposons que quatre des arêtes formant un quadrilatère gauche soient osculatrices à la surface; soient

$$(2) \qquad \begin{cases} (z = 0, t = 0), & (x = 0, z = 0), \\ (x = 0, y = 0), & (y = 0, z = 0), \end{cases}$$

cela veut dire que

$$a = 3\alpha^2\beta, \quad a' = 3\alpha\beta^2, \text{ etc.}$$

Les quatre points sont donc complétement déterminés en ajoutant aux équations (2) les équations (1) transformées :

$$(\alpha x + \beta y)^3 = 0, \quad (\beta y + \delta t)^3 = 0,$$
$$(\gamma z + \delta t)^3 = 0, \quad (\alpha x + \delta t)^3 = 0,$$

ce qui prouve que ces quatre points sont dans un même plan. Donc, quand un quadrilatère a ses côtés osculateurs d'une surface du troisième ordre, les points de contact sont dans un même plan. Si les six arêtes du tétraèdre sont osculatrices à la surface, il est facile de voir que les six points de contact sont dans un même plan. Étant donnée une surface quelconque du troisième ordre, on peut toujours trouver un tétraèdre dont les arêtes soient ainsi osculatrices à la surface. En effet, exprimer qu'une droite est osculatrice équivaut à deux conditions. Il faut donc douze conditions pour que les arêtes du tétraèdre soient osculatrices. Or il y a douze paramètres indéterminés dans les équations des faces du tétraèdre; donc le problème comporte un nombre déterminé de solutions. L'un de ces tétraèdres étant pris pour tétraèdre de référence, l'équation générale des surfaces du troisième ordre peut s'écrire :

$$(lx + my + nz + pt)^3 = \alpha yzt + \beta xzt + \gamma xyt + \delta xyz.$$

Elle renferme bien dix-neuf paramètres arbitraires distincts. Cette forme d'équation nous permet de donner immédiatement une propriété commune à toutes les surfaces du troisième ordre.

On donne un tétraèdre, un plan fixe et quatre directions fixes. Imaginons que l'on mène par un point quatre parallèles à ces directions fixes et qu'on les arrête chacune à une face du tétraèdre, ces obliques, prises trois à trois, forment quatre tétraèdres. *Le lieu des points tels, que la somme algébrique des volumes de ces tétraèdres, divisée par le cube de la distance de ces points à un plan fixe, reste constante est une surface du troisième ordre.*

M. de Jonquières a démontré dans les *Nouvelles Annales* (t. III, 2e série, p. 20) que : *La surface nodale d'une surface du troisième ordre passe par les points de contact des plans stationnaires de cette surface et leur est tangente en un autre point.* Avant de me servir de ce théorème, je vais donner de la première partie de ce théorème une démonstration géométrique assez simple.

Par un point O, on mène une sécante qui rencontre la surface aux trois points M_1, M_2, M_3; le lieu d'un point M défini par la relation

$$\sum_3 \left(\frac{1}{OM} - \frac{1}{OM_1}\right)\left(\frac{1}{OM} - \frac{1}{OM_2}\right) = 0$$

est la surface polaire du point O. La relation peut s'écrire :

$$MM_1 . MM_2 . OM_3 + MM_2 \; MM_3 . OM_1 + MM_3 . MM_1 . OM_2 = 0.$$

Si le point O est sur la surface, il se confond avec le point M_1 par exemple, et la relation devient

$$MM_1 (MM_2 . M_1M_3 + MM_3 . M_1M_2) = 0 ; \; MM_1 = 0,$$

c'est-à-dire que la surface polaire passe par le point M_1; le second point situé sur la sécante est défini par la relation

$$MM_2 . M_1M_3 + MM_3 . M_1M_2 = 0.$$

Si la sécante devenait tangente à la surface alors

$$M_1M_2 = 0 ;$$

il en résulte

$$MM_2 = 0,$$

c'est-à-dire que la surface et la surface polaire ont même plan tangent. Si la sécante devient une des asymptotes de l'indicatrice, alors la position du point M est indéterminée sur la sécante, c'est-à-dire que la surface et la surface polaire ont au point O les mêmes asymptotes de l'indicatrice; si la surface polaire, qui est du second ordre, est un cône, son plan tangent le coupe suivant deux droites confondues; en ce point, l'indicatrice se compose de deux droites parallèles : ce point est parabolique, ce qu'il fallait démontrer. Le plan tangent en ce point est tangent à la surface nodale, et le point de contact est sur la tangente inflexionnelle unique à la surface du troisième ordre. L'équation de la surface nodale de la surface du troisième ordre, dont l'équation est

$$u^3 - \alpha yzt - \beta xzt - \gamma xyt - \delta xyr = 0,$$

$$u = lx + my + nr + pt,$$

s'écrit :

$$\begin{vmatrix} 6l^2u & 6lmu-\delta z-\alpha t & 6lnu-\delta y-\beta t & 6lpu-\gamma y-\beta z \\ 6lmu-\delta z-\gamma t & 6m^2u & 6mnu-\delta x-\alpha t & 6mpu-\gamma x-\alpha z \\ 6lnu-\delta y-\beta t & 6mnu-\delta x-\alpha t & 6n^2u & 6npu-\beta x-\alpha y \\ 6lpu-\gamma y-\beta z & 6mpu-\gamma x-\alpha z & 6npu-\beta x-\alpha y & 6p^2u \end{vmatrix}=0.$$

Son intersection avec la surface donne la courbe parabolique. Cherchons son intersection avec le plan $u=0$, les points seront donnés par cette équation jointe aux deux équations :

$$\alpha yzt+\beta xzt+\gamma xyt+\delta xyz=0,$$

et

$$\begin{vmatrix} 0 & \delta z+\gamma t & \delta y+\beta t & \gamma y+\beta z \\ \delta z+\gamma t & 0 & \delta x+\alpha t & \gamma x+\alpha z \\ \delta y+\beta t & \delta x+\alpha t & 0 & \beta x+\alpha y \\ \gamma y+\beta z & \gamma x+\alpha z & \beta x+\alpha y & 0 \end{vmatrix}=0.$$

Cette dernière développée s'écrit :

$$\begin{aligned}(\delta z+\gamma t)^2(\beta x+\alpha y)^2&+(\gamma y+\beta z)^2(\delta x+\alpha t)^2\\ &+(\gamma x+\alpha z)^2(\delta y+\beta t)^2\\ &-2(\beta x+\alpha y)(\delta z+\gamma t)(\gamma y+\beta z)(\delta x+ot)\\ &-2(\beta x+\alpha y)(\delta z+\gamma t)(\gamma x+\alpha z)(\delta y+\beta t)\\ &-2(\gamma y+\beta z)(\delta x+\alpha t)(\gamma x+\alpha z)(\delta y+\beta t)=0.\end{aligned}$$

On peut développer cette équation et l'écrire :

$$\begin{aligned}0=\alpha yzt\left(\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}+\frac{t}{\delta}\right)&+\beta xzt\left(\frac{x}{\alpha}+\frac{z}{\gamma}+\frac{t}{\delta}\right)\\ &+\gamma xyt\left(\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}+\frac{t}{\delta}\right)+\delta xyz\left(\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}\right);\end{aligned}$$

et enfin on peut l'écrire :

$$\left(\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}+\frac{t}{\delta}\right)(\alpha yzt+\beta xzt+\gamma xyt+\delta xyz)-4xyzt=0.$$

Donc enfin les points sont donnés par l'intersection des trois surfaces :

$$u = 0, \quad xyzt = 0, \quad \alpha yzt + \beta xrt + \gamma xyt + \delta xyr = 0.$$

Ce sont les points où le tétraèdre de référence est osculateur à la surface ; de plus, *le plan de ces six points de contact est tangent en ces points à la courbe parabolique.* En chacun de ces points, par exemple ($z = 0$, $t = 0$, $lx + my = 0$), le plan tangent à la surface du troisième ordre a pour équation $\delta z + \gamma t = 0$; il est facile de voir que ce plan est tangent à la surface nodale au point $z = 0$, $t = 0$, $lx - my = 0$; par suite, deux des sommets du tétraèdre et les deux points de contact du plan tangent commun à la surface du troisième ordre et à sa surface nodale forment un système harmonique.