Nouvelles annales de mathématiques

Louis-Fernandez Pasalagua

Note sur le rayon de courbure de l'ellipse

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 7 (1868), p. 518-519

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1868_2_7__518_0>

NOTE SUR LE RAYON DE COURBURE DE L'ELLIPSE;

PAR M. LOUIS-FERNANDEZ PASALAGUA.

On connaît (*voir* BERTRAND, *Calcul différentiel*, p. 535) l'expression remarquable du rayon de courbure de l'ellipse

$$\rho = \frac{p}{\cos^3\varphi}, \tag{1}$$

φ désignant l'angle de la normale au point considéré (x, y) avec un des rayons vecteurs issus des foyers. Or l'angle de la normale avec l'axe des x a pour tangente $\frac{a^2 y}{b^2 x}$, la tangente de l'angle avec l'axe des x du rayon vecteur issu du foyer de droite, par exemple, est $\frac{y}{x-c}$; donc

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\dfrac{y}{x-c} - \dfrac{a^2 y}{b^2 x}}{1 + \dfrac{a^2 y}{b^2 x}\,\dfrac{y}{x-c}} = \frac{-cy}{b^2},$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{c^2 y^2}{b^4}}} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 - x^2 - y^2}}.$$

L'expression (1) devient alors, en remplaçant $\cos\varphi$ par cette valeur et p par $\frac{b^2}{a}$,

$$\rho = \frac{(a^2 + b^2 - x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}}{ab}; \tag{2}$$

si nous appelons a' la longueur du diamètre qui aboutit au point considéré,

$$(3) \qquad \rho = \frac{(a^2 + b^2 - a'^2)^{\frac{3}{2}}}{ab}.$$

Désignons par b' la longueur du diamètre conjugué, par ψ l'angle de ces deux diamètres. Nous aurons, en ayant égard au théorème d'Apollonius,

$$(4) \qquad \rho = \frac{b'^3}{ab} = \frac{b'^2}{a' \sin\psi}.$$

Cette expression permet de construire très-simplement le rayon de courbure en un point de l'ellipse, lorsqu'on connaît les longueurs du diamètre qui y passe OA′(*), et du diamètre conjugué OB′. Du point A′ abaissons A′P perpendiculaire sur OB′. AP′ est évidemment égal à $a' \sin\psi$. Décrivons de A′ comme centre un cercle de rayon égal à b', et menons-lui la tangente PL. Si nous abaissons Lc perpendiculaire sur A′P, le point c est le centre de courbure, et A′C est, en grandeur et en position, le rayon de courbure de l'ellipse en A′.