NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 7 (1868), p. 417-419

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1868_2_7__417_0>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 847

(voir 2e série, t VII, p 137);

PAR M. T. DOUCET,
Professeur au lycée de Lyon.

Par une droite tangente à une surface quelconque en un point M, *on mène différents plans sécants ; on construit pour chacune des sections que ces plans déterminent dans la surface la parabole qui suroscule la section au point* M : *le lieu des foyers de ces paraboles est un cercle.*

Soit

$$z = f(x, y)$$

l'équation de la surface. Rapportons-la à des axes rectangulaires, prenons pour origine le point M et pour plan des xy le plan tangent en ce point, puis appliquons à la fonction z le développement de Maclaurin. On aura

$$z = ax^2 + bxy + cy^2 + dx^3 + \ldots,$$

les coefficients a, b,..., ayant une signification connue.

Si l'on choisit, en outre, comme axe des x, la droite considérée, la section faite dans la surface par un plan incliné de l'angle θ sur le plan tangent aura pour équation dans son plan

$$(1) \qquad \beta \sin\theta = a\alpha^2 + b\alpha\beta\cos\theta + c\beta^2\cos^2\theta + d\alpha^3 + \ldots;$$

l'axe des α est Mx et l'axe des β est la trace du plan sécant sur zMy.

Une parabole située dans le plan sécant et tangente en M à l'axe Mx a une équation de la forme

$$(2) \qquad (\beta - m\alpha)^2 = 2n\beta.$$

Si l'on substitue dans (1) α déduit de l'équation (2) en fonction de $\sqrt{\beta}$ et qu'on exprime que l'équation résultante est satisfaite par $(\sqrt{\beta})^4 = 0$, la parabole et la courbe (1) ont en M quatre points communs. On trouve les deux conditions

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\sin\theta = \frac{2an}{m^2}, \\ &\frac{2a}{m^2} + \frac{b\cos\theta}{m} + \frac{2nd}{m^3} = 0. \end{aligned} \right.$$

L'axe de la parabole a pour équation

$$\beta = m\alpha + \frac{n}{1+m^2};$$

le foyer est en outre sur la droite

$$\beta + m\alpha = 0;$$

les coordonnées β' et α' de ce foyer sont donc

$$\beta' = \frac{n}{2(1+m^2)}, \quad \alpha' = -\frac{n}{2m(1+m^2)},$$

et, par rapport aux axes primitifs,

$$(4) \quad z = \frac{n\sin\theta}{2(1+m^2)}, \quad y = \frac{n\cos\theta}{2(1+m^2)}, \quad x = -\frac{n}{2m(1+m^2)}.$$

L'élimination de n entre les trois équations (4) donne

$$\frac{z}{y} = tg\,\theta, \quad z + mx\sin\theta = 0;$$

entre les deux équations (3) elle donne

$$m(ab\cos\theta + d\sin\theta) + 2a^2 = 0.$$

De ces trois dernières on tire immédiatement

$$(5) \qquad dz + aby - 2a^2x = 0.$$

Substituant les valeurs de m et de n dans celle de z, on a

$$(6) \qquad x^2 + y^2 + z^2 - \frac{z}{4a} = 0,$$

équation d'une sphère.

Le lieu cherché est donc une circonférence, intersection de la sphère (6) par le plan (5).

L'examen des équations (5) et (6) indique facilement les particularités que peut présenter cette circonférence.

Note. — M. Neuberg, professeur à Bruges, nous a envoyé une solution très-élégante de la même question; nous regrettons que le défaut d'espace ne nous permette pas de l'insérer.

La solution de M. Pellet se rapproche de celle de M. Doucet.