NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

H. LAURENT

Théorie des asymptotes

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 7 (1868), p. 413-416

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1868_2_7__413_1>

THÉORIE DES ASYMPTOTES;

PAR M. H. LAURENT,
Répétiteur d'Analyse à l'École Polytechnique.

On appelle asymptote d'une branche de courbe infinie, une droite telle que la distance d'un point de la branche à cette droite diminue indéfiniment.

Voyons d'abord à quelles conditions l'axe des x pourra être une asymptote d'une courbe donnée. Il faut évidemment et il suffit que lorsque l'y tend vers zéro, l'x augmente indéfiniment en valeur absolue; mais il ne faudrait pas dire que pour $y=0$ l'équation de la courbe doit avoir une racine infinie, car il pourrait arriver que cette racine infinie existât indépendamment de l'hypothèse $y=0$.

Bornons-nous au cas des courbes algébriques; leur équation est de la forme suivante (a_i désignant un polynôme du degré i en y) :

$$a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots = 0.$$

Si l'on divise par x^m et si l'on fait $y=0$, on reconnaît que l'équation précédente ne peut avoir de racines infinies que si a_0 est nul; mais a_0 ne contenant pas y, on voit que le terme de degré m en x ne doit pas exister dans l'équation; cette équation a donc une racine infinie en x, quel que soit y, on ne peut donc pas dire que

$$\lim x = \infty \quad \text{pour} \quad y=0;$$

pour satisfaire à cette condition, nous diviserons par x^{m-1}, puis, faisant converger y vers zéro, il viendra

$$a_1 = 0 \quad \text{pour} \quad y=0;$$

si a_1 est une quantité nulle quel que soit y, on posera

$$a_2 = 0 \quad \text{pour} \quad y=0,$$

et ainsi de suite.

On conclut immédiatement de là qu'une asymptote de courbe algébrique est une tangente dont le point de contact est à l'infini, car supposer $a_0=0$ et $a_1=0$, c'est supposer que l'axe des x, qui est l'asymptote, a deux points communs avec la courbe à l'infini.

On en conclut aussi que si une droite est asymptote à une branche de courbe, elle est asymptote à une seconde branche, puisque l'asymptote rencontre la courbe en *deux* points situés à l'infini.

Procédons maintenant à la recherche générale des asymptotes des courbes algébriques. Soit

$$(1) \qquad f(x, y) = 0.$$

leur équation.

Transportons l'origine en un point η, ξ, et faisons tourner les axes de l'angle α, θ étant l'angle des axes primitifs; on aura pour équation transformée

$$f\left[\xi + \frac{x\sin(\theta-\alpha) - y\sin\alpha}{\sin\theta},\ \eta + \frac{x\sin\alpha + y\sin(\theta+\alpha)}{\sin\theta}\right] = 0;$$

en faisant $y = 0$, il vient

$$(2) \qquad f\left[\xi + x\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\sin\theta},\ \eta + x\frac{\sin\alpha}{\sin\theta}\right] = 0.$$

Cette équation en x doit avoir deux racines infinies pour que l'axe des x soit une asymptote; en écrivant ces deux conditions, on aura deux équations en ξ, η, α; l'élimination de α fera connaître une relation entre ξ et η, qui sera l'équation d'une asymptote ou de leur ensemble, selon que l'élimination aura été faite, partiellement par substitution, ou d'une manière générale.

Désignons par φ, χ, ψ, ϖ,... respectivement les termes de f qui sont des degrés m, $m-1$, $m-2$, $m-3$,..., la formule (2) pourra s'écrire

$$x^m\varphi\left[\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\sin\theta}, \frac{\sin\alpha}{\sin\theta}\right]$$
$$+ x^{m-1}\left\{\xi\varphi'_\xi\left[\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\sin\theta}, \frac{\sin\alpha}{\sin\theta}\right] + \eta\varphi'_\eta\left[\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\sin\theta}, \frac{\sin\alpha}{\sin\theta}\right]\right.$$
$$\left. + \chi\left[\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\sin\theta}, \frac{\sin\alpha}{\sin\theta}\right]\right\} + \ldots;$$

on aura donc, pour déterminer les angles α que font les asymptotes avec les axes,

$$(3) \qquad \varphi[\sin(\theta-\alpha),\ \sin\alpha]=0,$$

et, pour déterminer les asymptotes elles-mêmes,

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi\varphi'_{\xi}[\sin(\theta-\alpha),\ \sin\alpha]+\eta\varphi'_{\eta}[\sin(\theta-\alpha),\ \sin\alpha] \\ \qquad\qquad +\chi[\sin(\theta-\alpha),\ \sin\theta]=0. \end{array} \right.$$

Si cette formule devenait identique, on la remplacerait par la suivante :

$$(5) \quad \xi^2\varphi''_{\xi^2}+2\eta\xi\varphi''_{\xi\eta}+\eta^2\varphi''_{\eta^2}+2\xi\chi'_{\xi}+2\eta\chi'_{\eta}+2\psi=0,$$

et ainsi de suite.

Application à l'hyperbole $x^2-y^2=1$.

Supposons les coordonnées rectangulaires, on a, au lieu de (3),

$$\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=0,$$

et, au lieu de (4),

$$\xi\cos\alpha-\eta\sin\alpha=0.$$

L'élimination de α donne immédiatement le faisceau des asymptotes

$$\xi^2-\eta^2=0.$$